УЧЕБНИКЪ ГЕОМЕТРІИ

СЪ ПРИЛОЖЕНІЕМЪ

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХЪ СТАТЕЙ.

С. И. ШОХОРЪ-ТРОЦКІЙ.

УЧЕБНИКЪ ГЕОМЕТРІИ

ДЛЯ СРЕДНИХЪ УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ,

СЪ ПРИЛОЖЕНІЕМЪ

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХЪ СТАТЕЙ

(305 политипажей въ текстѣ).

Изданіе А. А. Карцева,
Москва, Мясницкая, Фуркасовскій пер., д. Обидиной.

1891.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Предлагаемый „Учебникъ Геометріи“ отличается отъ другихъ сочиненій по тому же предмету слѣдующими особенностями:

1) Всѣ болѣе или менѣе важныя, но обыкновенно не высказываемыя положенія, принимаемыя въ геометріи безъ доказательства, въ этомъ сочиненіи всякій разъ формулируются, въ видѣ отдѣльныхъ допущеній (постулатовъ), такъ какъ на этихъ допущеніяхъ основываются доказательства цѣлаго ряда зависящихъ отъ каждаго изъ нихъ теоремъ. Такая формулировка необходима не только съ логической, но и съ педагогической точки зрѣнія. Такимъ образомъ получается цѣлый рядъ допущеній:

а) относительно прямой линіи: прямая линія безконечна, непрерывна, простирается по обѣ стороны любой своей точки и дѣлима на части; изъ всякой точки пространства можетъ быть проведена прямая линія; изъ всякой точки пространства можетъ быть проведено безчисленное множество прямыхъ линій; черезъ всякія двѣ точки можетъ быть проведена прямая линія; черезъ всякія двѣ точки можетъ быть проведена только одна прямая линія; отрѣзокъ прямой линіи, соединяющій двѣ точки пространства, меньше отрѣзка всякой другой линіи, соединяющаго тѣ же точки; прямая линія можетъ быть принята за ось вращенія той фигуры, въ составъ которой она входитъ;

б) относительно плоскости: чрезъ всякую прямую линію можетъ быть проведена плоскость; чрезъ всякую прямую можетъ быть проведено безчисленное множество плоскостей; если прямая имѣетъ съ плоскостью двѣ общія точки, то всѣ точки этой прямой находятся въ данной плоскости; если въ плоскости взяты прямая и двѣ точки по разныя стороны этой прямой, то всякая линія, проведенная въ той же плоскости чрезъ эти двѣ точки, имѣетъ съ данной прямой хоть одну общую точку; если плоскость вращать вокругъ прямой, лежащей въ этой плоскости, то каждая точка пространства при

если въ пространствѣ даны плоскость и двѣ точки по разныя стороны ея, то всякая линія, проходящая чрезъ эти двѣ точки, имѣетъ съ данной плоскостью хоть одну общую точку;

в) относительно окружности: всякую точку на плоскости можно принять за центръ безчисленнаго множества окружностей, лежащихъ въ этой плоскости, а всякую конечную прямую — за радіусъ какой либо окружности; окружность есть линія замкнутая;

г) относительно угловъ: всякій уголъ раздѣляется на данное число равныхъ между собою частей нѣкоторыми, вполнѣ опредѣленными, прямыми, выходящими изъ его вершины;

д) относительно двухъ несоизмѣримыхъ значеній одной и той же величины: если два значенія нѣкоторой величины несоизмѣримы другъ съ другомъ, то допускается существованіе отвлеченнаго числа, которое, не будучи ни цѣлымъ числомъ, ни дробнымъ съ цѣлыми числителемъ и знаменателемъ, все-таки представляетъ собою отношеніе одного изъ этихъ значеній данной величины къ другому;

е) относительно всякой кривой линіи: длина отрѣзка всякой кривой линіи можетъ быть выражена въ единицахъ мѣры длины;

ж) относительно объемлемой кривой линіи: выпуклая объемлемая кривая менѣе ломаной или кривой, ее объемлющей (такъ называемый второй *Архимедовъ постулатъ*);

з) относительно поверхности тѣла и части ея: величина поверхности всякаго тѣла и любой ея части можетъ быть выражена въ единицахъ мѣры площадей;

и) относительно боковыхъ поверхностей прямого цилиндра и прямого конуса: боковая поверхность цилиндра менѣе боковой поверхности всякой правильной, описанной около него, многоугольной призмы, и болѣе боковой поверхности всякой правильной, вписанной въ него, многоугольной призмы; боковая поверхность прямого конуса менѣе боковой поверхности всякой правильной, описанной около него, многоугольной пирамиды и болѣе боковой поверхности всякой правильной, вписанной въ него, многоугольной пирамиды;

і) относительно поверхностей такъ называемаго кубаря, вписаннаго въ сферу или описаннаго около нея: поверхность описаннаго около сферы кубаря болѣе поверхности этой сферы, а поверхность кубаря, вписаннаго въ сферу, менѣе поверхности сферы *).

---

*) *Кубаремъ*. для краткости, мы называемъ тѣло вращенія, получаемое отъ вращенія полумногоугольника, вписаннаго въ полукругъ или описаннаго около него, вокругъ діаметра этого полумногоугольника.

Логическое значеніе перечисленныхъ допущеній, конечно, не можетъ подлежать спору, если только признать, что въ математической наукѣ должно быть строго установлено — какія изъ положеній, для нея необходимыхъ, принимаются безъ доказательства. При этомъ отступленіемъ отъ обычнаго взгляда на допущенія является не введеніе ихъ въ курсъ (безъ нихъ не обходится ни одна система геометріи), но только отдѣльная, отъ основанныхъ на нихъ опредѣленіи и теоремъ, формулировка этихъ допущеній.

2) Къ числу понятій неопредѣлимыхъ и потому не подлежащихъ опредѣленію нами причислены понятія о прямой, о плоскости, о линейномъ углѣ, объ углѣ двугранномъ, о длинѣ линіи и величинѣ поверхности тѣла. Вслѣдствіе этого длина окружности не *опредѣляется*, какъ предѣлъ длины вписанной въ кругъ или описанной около него замкнутой выпуклой ломаной; тѣмъ болѣе, что доказательство существованія такого предѣла представляетъ для учащихся большія трудности. Напротивъ: на основаніи второго Архимедова постулата, мы, принявъ понятіе длины окружности за понятіе неопредѣлимое, но существующее въ нашемъ умѣ, *доказываемъ*, что длина окружности есть предѣлъ периметра правильныхъ многоугольниковъ, вписанныхъ въ кругъ и описанныхъ около него. Аналогичное относится и къ ученію о поверхностяхъ круглыхъ тѣлъ.—Такая постановка вопросовъ о длинѣ окружности круга и о поверхности круглаго тѣла, кажется, вполнѣ отвѣчаетъ цѣлямъ преподаванія геометріи въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ,—тѣмъ болѣе, что она въ логическомъ отношеніи лишь немногимъ уступаетъ той постановкѣ вопроса, которая исходитъ изъ опредѣленій длины кривой и величины кривой поверхности какъ предѣловъ нѣкоторыхъ перемѣнныхъ величинъ.

3) Доказательства многихъ теоремъ иногда у нѣкоторыхъ авторовъ основываются на такъ наз. „очевидныхъ“ свойствахъ данныхъ фигуръ. Такая постановка дѣла, конечно, не можетъ считаться нормальной, ибо принципъ очевидности не можетъ служить критеріемъ для сужденія о томъ, слѣдуетъ ли или не слѣдуетъ доказывать данное свойство фигуры. Руководясь этимъ, мы предпочли многія свойства доказывать, не ссылаясь на такъ называемую „очевидность“ ихъ. — Для того, чтобы не увеличивать, безъ пользы для дѣла, объемъ настоящаго предисловія, ограничимся указаніями на слѣдующія теоремы: равнодѣлящія двухъ, прилежащихъ къ одной сторонѣ, угловъ правильнаго многоугольника пересѣкаются въ точкѣ, лежащей внутри многоугольника: во всякомъ выпукломъ

многогранномъ углѣ можно провести плоскость, которая пересѣкала бы всѣ ребра многограннаго угла. Къ числу подобныхъ теоремъ, на которыхъ основаны доказательства теоремъ, крайне важныхъ въ курсѣ не только съ логической, но и съ фактической точки зрѣнія, принадлежатъ, между прочимъ, также теоремы: 3, 38, 40, 41, 47, 71, 101, и нѣк. другія.

4) Опредѣленію всякаго понятія въ предлагаемомъ „Учебникѣ“ предшествуетъ либо теорема, доказывающая возможность существованія данной геометрической фигуры, либо же равносильное ей разъясненіе этой возможности. Если же почему либо въ данномъ случаѣ удобнѣе и быстрѣе можно придти къ цѣли съ помощью генетическаго опредѣленія, то этотъ родъ опредѣленія, конечно, предпочитается инымъ родамъ. — Необходимость увѣренности въ существованіи данной опредѣляемой формы повліяла на насъ также при рѣшеніи вопроса о томъ, что не только прямая линія и уголъ, но даже и плоскость представляютъ собою понятія неопредѣлимыя; первыя два понятія не разложимы на болѣе простыя; что же касается плоскости, то доказать существованіе такой поверхности, которая обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что всѣ точки любой прямой, имѣющей съ нею двѣ общія точки, лежатъ на этой поверхности, какъ извѣстно, не представляется возможнымъ. Въ отношеніи доказательства существованія опредѣляемыхъ фигуръ нашъ „Учебникъ“ вообще значительно отличается отъ тѣхъ сочиненій по предмету геометріи, въ которыхъ, по примѣру Евклида и Лежандра, даются классификаціи треугольниковъ и др. фигуръ, опредѣленія правильныхъ многоугольниковъ и другихъ геометрическихъ формъ, безъ всякаго вниманія къ вопросу о томъ — существуютъ ли опредѣляемыя геометрическія формы на самомъ дѣлѣ.

5) Теорема совмѣстимости двухъ плоскостей изложена тотчасъ послѣ первой теоремы (о совмѣстимости двухъ прямыхъ) и такимъ образомъ занимаетъ въ курсѣ Планиметріи, можно сказать, первенствующее мѣсто, каковое ей по праву и принадлежитъ. — Безъ нея всѣ теоремы и ученія о совмѣщеніи плоскихъ фигуръ, о равенствѣ угловъ, о дѣйствіяхъ сложенія и вычитанія надъ углами и вообще о плоскихъ фигурахъ лишены своей истинной основы и своего дѣйствительнаго значенія. На практикѣ можетъ оказаться, что усвоеніе учащимися этой теоремы во всемъ ея объемѣ представитъ затрудненія; въ такомъ случаѣ должна быть выдвинута на первый планъ хотя бы только сущность теоремы съ тѣмъ, чтобы учащійся могъ ею пользоваться въ дальнѣйшемъ курсѣ и вернулся бы къ ней впослѣдствіи, когда умъ его и діалектическія умѣнія разовьются на-

столько, что полное усвоеніе теоремы не будетъ болѣе представлять значительныхъ затрудненій. Но, съ другой стороны, не представляютъ ли именно эти трудности той выгоды, что учащійся на первыхъ же порахъ знакомится съ теоремою, которой доказательство геометрично? Какъ извѣстно, неудачи учащихся въ изученіи геометріи часто обусловливаются именно тѣмъ, что какъ-разъ первыя теоремы ея принадлежатъ къ числу истинъ вполнѣ очевидныхъ.

6) Статья объ относительномъ положеніи прямой и окружности и двухъ окружностей на плоскости предшествуетъ рѣшенію задачъ, требующему примѣненія циркуля и линейки, т. е. основанному на пересѣченіи прямой съ окружностью и двухъ окружностей. Относительно этой статьи практика можетъ привести къ заключенію, что изъ нея (по причинѣ крайней очевидности многихъ теоремъ этой статьи) учащемуся должны быть сообщены только важнѣйшія положенія, но съ тѣмъ, чтобы онъ впослѣдствіи снова вернулся къ этой статьѣ. — Какъ ни грустна необходимость иногда поступаться наиболѣе желательнымъ, съ логической и научной точки зрѣнія, порядкомъ прохожденія различныхъ статей курса, но съ этою необходимостью надо считаться. Въ „Учебникѣ“ мы сочли однако умѣстнымъ, по мѣрѣ силъ своихъ, держаться того порядка статей, который, по нашему разумѣнію, наиболѣе отвѣчаетъ требованіямъ логики математическихъ наукъ.

7) Статья о параллельныхъ линіяхъ предшествуетъ статьѣ о треугольникахъ и ученію о перпендикулярѣ и наклонныхъ, такъ какъ такимъ образомъ, по нашему мнѣнію, достигается бо́льшая стройность курса. За аксіому принятъ такъ наз. постулатъ Евклида, (вѣрнѣе: 11-ая Евклидова аксіома), и притомъ въ той формѣ, какая этому постулату придана въ Евклидовыхъ „Началахъ“. — Вообще мы предпочитали держаться во всѣхъ сомнительныхъ случаяхъ взглядовъ, проводимыхъ въ этомъ истинно-классическомъ и наиболѣе величавомъ твореніи человѣческаго ума на поприщѣ построенія научныхъ системъ.

8) На доступное учащемуся и по возможности простое обоснованіе и изложеніе теоріи предѣловъ обращено особенное вниманіе, причемъ постановка основныхъ вопросовъ этой теоріи всецѣло примыкаетъ къ современной теоріи безконечно-малыхъ величинъ.

9) Въ „Стереометріи“ ученія о прямой, параллельной къ плоскости, и о взаимно-параллельныхъ плоскостяхъ предшествуютъ ученію о взаимно-перпендикулярныхъ прямой и плоскости. — При этомъ нами руководили тѣ же соображенія, которыя при-

вели насъ къ положительному рѣшенію вопроса о томъ, что характеризующую Евклидово пространство теорію параллельныхъ линій слѣдуетъ предпосылать ученію о треугольникахъ.

10) Въ „Дополнительныхъ статьяхъ“ нами вкратцѣ намѣчены тѣ ученія, которыя могутъ доставить наиболѣе успѣвающимъ ученикамъ не мало матеріала для болѣе или менѣе самостоятельной работы надъ вопросами геометріи.

12) Чертежи въ „Стереометріи“ изготовлены нами согласно тому условному перспективному принципу, по которому болѣе близкія къ глазу зрителя части линій сдѣланы толще болѣе удаленныхъ; благодаря этому принципу, думается намъ, чертежи „Стереометріи“ въ отношеніи наглядности много выиграли сравнительно съ чертежами, сдѣланными безъ соблюденія требованій этого принципа.

13) Многія теоремы, обыкновенно излагаемыя отдѣльно отъ тѣхъ теоремъ, на которыхъ исключительно основано ихъ доказательство, нами формулированы какъ слѣдствія этихъ послѣднихъ. Вслѣдствіе этого у насъ нѣтъ, напр., отдѣльной статьи о такъ называемыхъ пропорціональныхъ линіяхъ въ кругѣ.—Смѣемъ думать, что стройность курса отъ этого не только ничего не теряетъ, но даже много можетъ выиграть.

14) Устройству и употребленію чертежныхъ инструментовъ (линейки, эккера, масштаба, циркуля, пропорціональнаго циркуля, пантографа и др.) нами не удѣлено никакого мѣста въ курсѣ, такъ какъ, по нашему мнѣнію, ученіе объ устройствѣ и употребленіи этихъ инструментовъ вовсе не подлежитъ вѣдѣнію геометріи. При рѣшеніи нами этого вопроса въ указанномъ смыслѣ на насъ тоже не мало повліяли „Начала“ Евклида. — Вообще, отступая во многихъ пунктахъ отъ частностей Евклидовой системы, мы, по мѣрѣ силъ своихъ и умѣнія, старались однако же подчиниться требованіямъ духа этой системы и, исходя изъ опредѣленій (ὅροι), требованій (αἰτήματα) и аксіомъ (κοιναὶ ἔννοιαι), на нихъ построить зданіе геометріи. При этомъ намъ пришлось однако же, считаясь съ требованіями современной логики математическихъ наукъ, опредѣленія подчинить точкамъ зрѣнія, отличнымъ отъ тѣхъ, которымъ они подчиняются въ Евклидовой системѣ, за аксіомы принять только не подлежащіе доказательству законы, относящіеся до величинъ, требованія же и аксіомы чисто-геометрическаго характера, выдѣлить въ отдѣльный классъ истинъ, называемыхъ нами (дабы не нестрить изложенія мало употребительнымъ иностраннымъ словомъ „постулатъ“) *допущеніями*.

Но сущность помянутаго духа требованій системы Евклидовой геометріи при этомъ, конечно, нисколько не страдаетъ. Сообразуясь съ нимъ, намъ пришлось признать, что описанію употребленія и устройства чертежныхъ инструментовъ, равно какъ начальнымъ свѣдѣніямъ изъ низшей геодезіи, не должно отводить мѣста въ геометрической системѣ: первое вполнѣ умѣстно только въ курсѣ черченія, второе — въ видѣ дополненія къ курсу тригонометріи.

16) Задачамъ на построеніе въ самомъ курсѣ отведено мѣсто лишь постольку, поскольку *необходимо* учащихся геометріи ознакомить съ основными пріемами рѣшенія задачъ этого рода у древнихъ; какъ извѣстно, задачамъ на построеніе въ средне-образовательномъ курсѣ геометріи можно удѣлить лишь весьма немного времени, тѣмъ болѣе что и геометрическому черченію которое должно идти рука объ руку съ рѣшеніемъ задачъ, только въ реальныхъ училищахъ можетъ быть отведено подобающее мѣсто въ курсѣ. — Для достиженія этихъ двухъ цѣлей могутъ съ большимъ успѣхомъ служить, въ качествѣ пособій, превосходный сборникъ задачъ А. Д. Дмитріева (составленный по Вёкелю и др. источникамъ) и извѣстный курсъ черченія Н. И. Нечаева, — сочиненія, какъ по духу, такъ и по объему своему, вполнѣ отвѣчающія требованіямъ среднихъ учебныхъ заведеній.

Въ заключеніе считаемъ долгомъ указать, что, кромѣ „Началъ Евклида“ (въ перев. проф. М. Е. Ващенка-Захарченка), мы пользовались сочиненіями: Лежандра (Eléments de Géométrie), Вакана (Vacquant, Cours de géométrie élémentaire), Н. И. Билибина (Элементарная геометрія), Бальцера (Baltzer, Elemente der Mathematik) и мн. другими изъ наиболѣе распространенныхъ сочиненій по предмету Евклидовой геометріи. Въ вопросахъ же методологическаго и логическаго характера мы иногда руководились взглядами слѣдующихъ авторовъ: Огюста Конта, Дюгамеля, Лотце, проф. М. М. Троицкаго, Б. Эрдмана, Рейдта и нѣк. другихъ.

Кромѣ того, считаемъ пріятнымъ долгомъ выразить свою живѣйшую признательность слѣдующимъ лицамъ: проф. К. Д. Краевичу, не отказавшемуся еще въ 1883 г. прочесть въ рукописи введеніе и первую главу настоящаго сочиненія (претерпѣвшія, впрочемъ, съ тѣхъ поръ многія измѣненія) и вообще не отказывавшему намъ въ своихъ добрыхъ совѣтахъ; проф. В. В. Преображенскому, предложившему намъ доказательство теоремы 2-ой

для случая, когда данная точка x лежитъ внутри фигуры DEF каковое доказательство почти неизмѣненнымъ и легло въ основу того доказательства, которое дано въ „Учебникѣ“; В. Л. Розенбергу, указаніямъ котораго мы не мало обязаны въ дѣлѣ приноровленія „Учебника“ къ потребностямъ среднихъ учебныхъ заведеній; художнику К. Н. Воронову, обратившему наше вниманіе на массу неправильностей, характеризующихъ чертежи въ курсахъ стереометріи. Позволимъ себѣ также съ искреннею признательностью и живѣйшею благодарностью помянуть имя скончавшагося въ 1887 г. члена Ученаго Комитета Министерства Народнаго Просвѣщенія Р. Н. Гришина, никогда не отказывавшаго намъ въ своихъ добрыхъ совѣтахъ при составленіи нами предлагаемаго „Учебника“ и др. посильныхъ трудовъ нашихъ.—Но само собою разумѣется, что только то, что̀ болѣе или менѣе удовлетворительно въ нашемъ „Учебникѣ геометріи“ и остальныхъ трудахъ нашихъ, а не то, въ чемъ заключаются ихъ слабыя стороны, можетъ быть объяснено совѣтами и содѣйствіемъ выше поименованныхъ нами лицъ, и намъ отнюдь не хотѣлось бы сдѣлать послѣднихъ отвѣтственными за общее направленіе предлагаемаго труда, ни тѣмъ болѣе—за выполненіе его деталей.

С. Шохоръ-Троцкій.

СПБургъ, Литовьа 29.
Декабрь 1890 года.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

	стр.
ВВЕДЕНІЕ	1 — 4
Планиметрія	5 —199
§ 1. О точкахъ, о прямой линіи и о плоскости. . . .	5
§ 2. Понятіе объ окружности и о дѣйствіяхъ надъ отрѣзками прямыхъ линій	10
§ 3. Объ углахъ.	13
§ 4. О параллельныхъ прямыхъ	24
§ 5. О равенствѣ треугольниковъ и о перпендикулярныхъ и наклонныхъ линіяхъ	38
§ 6. О многоугольникахъ, параллелограммахъ и трапеціяхъ	58
§ 7. Объ относительномъ положеніи прямой и окружности и объ относительномъ положеніи двухъ окружностей въ плоскости	63
§ 8. Задачи, относящіяся къ предъидущимъ статьямъ . .	77
§ 9. О хордахъ, дугахъ и углахъ въ кругѣ	87
§ 10. О пропорціональныхъ прямыхъ и о подобіи прямолинейныхъ фигуръ	111
§ 11. О вписанныхъ и описанныхъ фигурахъ и о правильныхъ многоугольникахъ.	136
§ 12. Объ измѣреніи площадей нѣкоторыхъ прямолинейныхъ фигуръ	159
§ 13. Способъ предѣловъ и его примѣненіе къ ученію о длинѣ окружности и о площади круга	173
Стереометрія	201—295
§ 1. Взаимное пересѣченіе прямой съ плоскостью и двухъ плоскостей	201
§ 2. Взаимно-параллельныя прямыя въ пространствѣ и взаимно-параллельныя прямая и плоскость. . . .	203
§ 3. Взаимно-параллельныя плоскости	208
§ 4. Взаимно-перпендикулярныя прямая и плоскость . .	213
§ 5. Объ углѣ двухъ прямыхъ и прямой съ плоскостью	223

стр.

§ 6. О двугранныхъ или плоскостныхъ углахъ 225
§ 7. О многогранныхъ углахъ 229
§ 8. О многогранникахъ. 236
§ 9. Измѣреніе поверхностей и объемовъ нѣкоторыхъ многогранниковъ 246
§ 10. О нѣкоторыхъ поверхностяхъ вращенія 265
§ 11. О круглыхъ тѣлахъ 272
Дополнительныя статьи . . . . . 296—310
1. Объ аксіомахъ 296
2. О взаимной зависимости теоремъ 297
3. О теоріи параллельныхъ линій 299
4. О пропорціональныхъ величинахъ. 299
5. Нѣкоторыя свойства треугольника 300
6. О правильныхъ многоугольникахъ 303
7. Нѣкоторыя задачи на построеніе. 304
8. О правильныхъ многоугольникахъ 306
9. О равенствѣ трегранныхъ угловъ. 308
10. О подобныхъ многогранникахъ и о подобныхъ тѣлахъ вращенія 308
11. О построеніи прямыхъ, выражаемыхъ алгебраическими формулами, и о приложеніи алгебры къ геометріи . . . 309

Необходимо исправить, ранѣе употребленія книги, слѣдующія опечатки:

Въ текстѣ:

Стран.	Строка.	*напечатано:*	*должно быть:*
5	6 снизу	принята ось	принята за ось
10	14 снизу	слѣдствіе 2-ое	слѣдствіе 1-ое
11	5 снизу	*центромъ*	*центромъ* этой окружности
32	5 снизу	36 и 37	36 и 36а
38	13 сверху	$<e$	$<c$
38	10 снизу	ограничивающія	ограничивающіе
41	6 снизу	MBA	MBC
45	20 и 18 снизу	AB	AC
53	19 сверху	CB	CF
55	15 сверху	CB	CF
55	14 снизу	въ	къ
61	10 и 15 снизу	больше	меньше
65	16 снизу	діаметръ	прямая, проходящая чрезъ центръ
65	16 снизу	онъ перпендикулярень	эта прямая перпендикулярна
71	1 снизу	окружности	окружностей
76	7 снизу	O_1 и O_2	O_3 и O_4
84	15 сверху	ACD	ECD
86	2 сверху	CD	BD
86	10 сверху	B	b
89	17 и 16 снизу	CD	ED
89	12 снизу	C	E
90	3 сверху	теоремы:	теоремы: 108—113 и 115—118
90	11 снизу	угловъ	угловъ въ одной и той же окружности
93	11 сверху	27	26
97	9 сверху	DE	DF
97	13 сверху	EB	ED
100	15 снизу	B	E
106	17 сверху	A	B
111	1 снизу	DH	GH
112	21 сверху	HT	HI
117	18 снизу	ED	EB
119	15 снизу	AC	AB
121	16 сверху	116	160
122	въ заглавіи	слѣдствіе 3-ое	слѣдствіе 4-ое
123	въ заглавіи	слѣдствіе 4-ое	слѣдствіе 5-ое
124	11 снизу	EB	FB
129	2 снизу	EBC	ABC
136	3 снизу	вписать	описать
137	5 снизу	EI	EJ
137	4 снизу	точекъ	точки
139	5 снизу	BCD	BDC
141	5 сверху	между частей	между собою частей
142	19 сверху	DE	GF
147	16 снизу	$FGHIK$	$abcdef$
148	5 сверху	AB	OF
152	16 снизу	многоугольника	многоугольнику

Стран.	Строка.	*напечатано:*	*должно быть:*
159	10 сверху	между квадратовъ	между собою квадратовъ
165	16 сверху	прямоугольники	прямоугольника
186	3 снизу	выпуклой	выпуклой кривой
197	3 сверху	$\overline{X}$ $\overline{X}$	$\overline{X}$ $\overline{Y}$
202	2 снизу	съ	въ
210	15 сверху	плоскость	плоскости
211	1 снизу	FF	CD
212	1 сверху	EF	CD
212	2 сверху	CD	EF
214	15 снизу	этихъ	въ этихъ
216	8 снизу	M	N
217	15 сверху	CDE	CED
222	12 сверху	A	C
222	13 сверху	BC	AB
225	въ заглавіи	§ 5	§ 6
226	3 сверху	$PABN$	PAB
226	19 снизу	допущенія теоремы	допущенія и теоремы
229	въ заглавіи	§ 6	§ 7
234	4 сверху	приведемъ	проведемъ
239	11 сверху	HD	HA
239	1 снизу	DE	DG
239	1 снизу	$GF \# FA$	$GD \# FA$
243	13 сверху	призмахъ или пирамидахъ	призмахъ
243	16 сверху	призмахъ или пирамидахъ	пирамидахъ
251	4 сверху	$JKEM$	$JKLM$
257	3 сверху	усѣченная	отсѣченная
261	4 сверху	Q	q
261	4 сверху	q	Q
261	1 снизу	GA	GA
263	6 снизу	пирамиды	призмы
264	4 снизу	пересѣченія	пересѣченія оси
266	17 снизу	цилидрическая	коническая
275	15 снизу	плоскость AB	прямую AB
282 и 283	въ теоремѣ 308	$(H+h)$	$(H-h)$
284	11 снизу	CMN	DMN
289	9 снизу	B	C
294	въ теоремѣ 314	OE	ON
294	въ теоремѣ 314	EB	NB
294	3 снизу	BE	AK
294	3 снизу	B	A
294	3 снизу	BA	Bb

Въ чертежахъ:

42-мъ точку пересѣченія прямыхъ EC и DF обозначить буквою M
53-мъ между точками R и S букву F замѣнить буквою T
73-мъ точку пересѣченія прямыхъ OO_1 и BB_1 обозначить буквою P
102 » » » AB и MN » » C
114-мъ основаніе перпендикуляра изъ точки E обозначить буквою C
145-мъ конецъ прямой BC обозначить буквою F
163-мъ вмѣсто буквы C на окружности поставить букву A
244-мъ вмѣсто прямой OD поставить OP
295-мъ между точками C и P поставить букву E

ВВЕДЕНІЕ.

I. *Пространство* безгранично, непрерывно, дѣлимо на части. Что такое пространство — знаетъ всякій; понятіе пространства принадлежитъ къ числу понятій *первоначальныхъ*, *основныхъ*, не поддающихся опредѣленію.

Всякое вещественное (физическое) тѣло занимаетъ нѣкоторую опредѣленную, т. е. ограниченную со всѣхъ сторонъ, *часть пространства*. Ограниченная со всѣхъ сторонъ часть пространства называется *тѣломъ геометрическимъ*. Геометрическія тѣла могутъ отличаться другъ отъ друга: 1) *положеніемъ* въ пространствѣ, 2) *видомъ* (формою) и 3) *величиной* (объемомъ); тѣла физическія, кромѣ того, могутъ отличаться другъ отъ друга также и многими другими свойствами.

II. *Граница*, отдѣляющая тѣло отъ остальнаго пространства, и всякая часть этой границы называется *поверхностью*. Граница, отдѣляющая одну часть поверхности отъ другой ея части, называется *линіею*. Начало или конецъ линіи, а также граница, отдѣляющая одну часть линіи отъ другой ея части, называется *точкою*.

Линіи, поверхности и геометрическія тѣла носятъ общее названіе *геометрическихъ протяженій*. Сочетаніе двухъ или нѣсколькихъ геометрическихъ протяженій называется *геометрической фигурой*. Наука, занимающаяся изученіемъ геометрическихъ фигуръ, называется *Геометріею*.

III. Точки могутъ отличаться одна отъ другой только своимъ *положеніемъ* въ пространствѣ; линіи могутъ отличаться одна отъ другой не только положеніемъ своимъ въ пространствѣ, но также *величиною* и *формою* своею; то же относится къ поверхностямъ, а равно къ геометрическимъ тѣламъ.

Точка не обладаетъ тѣмъ свойствомъ вещественнаго тѣла, которое называется величиною тѣла, какъ бы мало тѣло ни было; въ этомъ смыслѣ говорятъ, что *точка не имѣетъ измѣреній*: ни

длины, ни ширины, ни толщины. Линія не обладаетъ тѣмъ свойствомъ, которое въ нити называется толщиною ея, какъ бы данная нить тонка ни была; въ этомъ смыслѣ говорятъ, что *линія есть протяженіе объ одномъ измѣреніи*, т. е. имѣетъ только длину, но не имѣетъ ни ширины, ни толщины. Поверхность не обладаетъ тѣмъ свойствомъ, которое въ оболочкѣ называется толщиною ея, какъ бы тонка данная оболочка ни была; въ этомъ смыслѣ говорятъ, что *поверхность есть протяженіе о двухъ измѣреніяхъ*, т. е. имѣетъ только длину и ширину, но не имѣетъ толщины. Объ *тѣлѣ* же говорятъ, что оно—*протяженіе о трехъ измѣреніяхъ*.

IV. Если точка перемѣщается въ пространствѣ, то она при этомъ непремѣнно движется по нѣкоторой линіи; это выражаютъ иначе, говоря, что точка при движеніи *образуетъ*, *описываетъ* нѣкоторую линію и что всякую линію можно разсматривать какъ воображаемый слѣдъ, оставленный въ пространствѣ точкою, двигавшейся извѣстнымъ образомъ. Для того, чтобы образовалась линія, достаточно такимъ образомъ перемѣщенія точки въ пространствѣ.

V. Въ Геометріи излагается рядъ истинъ о геометрическихъ протяженіяхъ и фигурахъ.

Совокупность разсужденій, съ помощью которыхъ убѣждаются въ данной истинѣ, называется *доказательствомъ*.

Въ Математикѣ есть истины, которыя принимаются безъ всякихъ доказательствъ. Такова, напр., истина: цѣлое болѣе своей части. Кромѣ того, въ Математикѣ есть такія истины, которыя безъ доказательства не принимаются. Такова, напр., истина: произведеніе суммы любыхъ двухъ чиселъ на ихъ разность равно разности квадратовъ тѣхъ же чиселъ.

Истины, въ наукѣ принимаемыя безъ доказательства, называются *аксіомами*; нѣкоторыя истины этого рода называются, впрочемъ, *допущеніями* или *постулатами*. Истины, въ наукѣ не принимаемыя безъ доказательства, называются *теоремами*.

VI. Въ Геометріи теоремы слѣдуютъ одна за другою въ нѣкоторомъ порядкѣ, въ нѣкоторой послѣдовательности; при этомъ доказательство каждой теоремы основано на аксіомахъ и доказанныхъ ранѣе теоремахъ.

Слѣдствіемъ какой-либо теоремы называется теорема, непосредственно вытекающая изъ данной теоремы путемъ умозаключенія

Теорема, введенная въ данную систему только для доказательства непосредственно слѣдующей за нею теоремы, или же для рѣшенія какой-либо задачи, называется *леммою*.

VII. Относительно величинъ въ Математикѣ слѣдующія истины принимаются за аксіомы:

1) Величина равна самой себѣ и болѣе своей части;

2) сумма всѣхъ частей данной величины равна этой величинѣ и не зависитъ отъ *порядка сложенія*;

3) изъ двухъ однородныхъ величинъ одна либо равна другой, либо меньше, либо больше ея;

4) если одна величина равна другой, то и вторая равна первой; если одна величина больше другой, то вторая меньше первой, а если одна меньше другой, то вторая больше первой;

5) всякую величину можно замѣнить равною ей;

6) если каждая изъ двухъ величинъ равна третьей, то эти двѣ величины равны между собою;

7) если одна величина больше другой, а другая больше третьей, то первая больше третьей;

8) если къ равнымъ между собою величинамъ прибавить, или отъ равныхъ отнять поровну, то получаются равные результаты;

9) если къ неравнымъ величинамъ прибавить, или отъ неравныхъ отнять поровну, то отъ дѣйствія надъ бо̀льшею величиною получается бо̀льшій результатъ;

10) если отъ равныхъ величинъ отнять неравныя, то получатся неравные результаты, притомъ отъ вычитанія большей величины—меньшій, а отъ вычитанія меньшей—большій результатъ;

11) если каждую изъ равныхъ между собою величинъ раздѣлить на одно и то же число равныхъ между собою частей, то каждая такая часть одной величины равна каждой части другой;

12) если каждую изъ неравныхъ между собою величинъ раздѣлить на одно и то же число равныхъ между собою частей, то каждая такая часть бо̀льшей величины больше каждой части меньшей;

13) если изъ четырехъ однородныхъ величинъ одна равна другой, а третья — четвертой, то отношеніе первой къ третьей равно отношенію второй къ четвертой.

Кромѣ этихъ аксіомъ, въ Геометріи необходимо принять безъ доказательства еще нѣкоторыя другія истины, чисто геометрическаго характера, которыя носятъ названіе *допущеній* или *постулатовъ*. Относительно всякихъ геометрическихъ протяженій и фигуръ принимается безъ доказательства слѣдующее допущеніе:

Всякое геометрическое протяженіе и всякую фигуру можно привести въ движеніе, не измѣняя ни формы, ни величины ихъ.

Замѣчаніе 1-ое. Нѣкоторыя изъ выше приведенныхъ аксіомъ принимаются безъ доказательства потому, что не могутъ быть доказаны; таковы аксіомы 1-ая, 2-ая, 3-я, 4-ая и 5-ая; остальныя же, хотя и могутъ быть доказаны, принимаются безъ доказательства только по причинѣ крайней ихъ *очевидности*.

VIII. Изъ всѣхъ возможныхъ линій Геометрія прежде всего разсматриваетъ *прямую*. Что такое прямая линія — знаетъ всякій. Понятіе о прямой принадлежитъ къ числу понятій *основныхъ*, *первоначальныхъ*, не поддающихся опредѣленію.

Всякая прямая можетъ быть разсматриваема въ двухъ прямопротивоположныхъ другъ другу *направленіяхъ*. Что такое направленіе прямой линіи — знаетъ всякій. Понятіе о направленіи тоже принадлежитъ къ числу первоначальныхъ, основныхъ, не поддающихся опредѣленію понятій.

Изъ всѣхъ возможныхъ поверхностей въ Геометріи прежде всего разсматривается *плоскость*. Что такое прямая во всѣхъ направленіяхъ поверхность или *плоскость* — знаетъ всякій. Понятіе о плоскости равнымъ образомъ принадлежитъ къ числу понятій основныхъ, первоначальныхъ, не подлежащихъ опредѣленію.

IX. *Начальная Геометрія* раздѣляется на двѣ части: *Планиметрію* и *Стереометрію*. Въ Планиметріи изучаются фигуры, всѣ точки которыхъ находятся въ одной плоскости; въ Стереометріи же — фигуры, въ которыхъ не всѣ точки находятся въ одной плоскости.

ПЛАНИМЕТРІЯ.

§ 1. О точкахъ, о прямой линіи и о плоскости.

Допущеніе относительно точекъ. Относительно точекъ въ Геометріи дѣлается слѣдующее допущеніе: если перемѣстить одну точку на мѣсто другой, неподвижной, точки, то эти двѣ точки совмѣстятся, совпадутъ, и въ результатѣ получится одна точка.—Когда говорятъ о *двухъ* точкахъ, то при этомъ имѣются въ виду двѣ не совмѣщающіяся точки.

Допущенія относительно прямой линіи. Относительно прямой линіи въ Геометріи дѣлаются слѣдующія допущенія:

1) прямая линія безконечна, непрерывна, простирается по обѣ стороны любой своей точки и дѣлима на части;

2) изъ всякой точки пространства можетъ быть проведена прямая линія;

3) изъ всякой точки пространства можетъ быть проведено безчисленное множество прямыхъ линій;

4) черезъ всякія двѣ точки можетъ быть проведена прямая линія;

5) черезъ всякія двѣ точки можетъ быть проведена только одна прямая линія;

6) отрѣзокъ прямой линіи, соединяющій двѣ точки пространства, меньше отрѣзка всякой другой линіи, соединяющаго тѣ же точки. (Короче, хотя и менѣе точно, допущеніе это выражаютъ такъ: прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками);

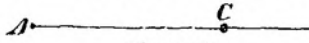
7) прямая линія можетъ быть принята ось вращенія той фигуры, въ составъ которой она входитъ.

Замѣчаніе 1-ое. Нѣкоторые авторы принимаютъ одно изъ трехъ послѣднихъ допущеній за опредѣленіе прямой, такъ какъ только прямая линія обладаетъ свойствами, выраженными въ этихъ допущеніяхъ.

Замѣчаніе 2-ое. Часто для краткости говорятъ „прямая“, вмѣсто словъ „прямая линія“, а также „прямая“ — вмѣсто словъ „отрѣзокъ прямой“. Отрѣзокъ прямой, ограниченный двумя точками, называютъ также *конечной прямой* въ отличіе отъ прямой безконечной.

Замѣчаніе 3-е. На чертежахъ прямую линію изображаютъ въ видѣ прямой черты, для лучшаго проведенія которой обыкновенно пользуются линейкой. Но при этомъ не должно смѣшивать изображеніе прямой съ прямою линіею, изучаемою въ Геометріи: всякое изображеніе прямой имѣетъ не только длину, но также ширину и толщину. То же относится къ изображенію точки.

Замѣчаніе 4-е. Если (черт. 1) дана конечная прямая AB и если точка ея C лежитъ между крайними точками A и B, то



Черт. 1.

$$AC + CB = AB,$$

$$AC < AB \text{ и } CB < AB,$$

и такимъ образомъ отрѣзки AC и CB являются частями отрѣзка AB, а отрѣзокъ AB—суммою отрѣзковъ AC и CB.

Допущенія относительно плоскости. Относительно плоскости въ Геометріи дѣлаются слѣдующія допущенія:

1) чрезъ всякую прямую можетъ быть проведена плоскость;

2) чрезъ всякую прямую можетъ быть проведено безчисленное множество плоскостей;

3) если прямая имѣетъ съ плоскостью двѣ общія точки, то всѣ точки этой прямой находятся въ данной плоскости;

4) если въ плоскости взята прямая и двѣ точки по разныя стороны этой прямой, то всякая линія, проведенная въ той же плоскости чрезъ эти двѣ точки, имѣетъ съ данной прямой хоть одну общую точку;

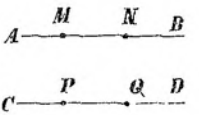
5) если безграничную плоскость вращать вокругъ прямой, лежащей въ этой плоскости, то каждая точка пространства при этомъ совпадетъ съ нѣкоторою точкою этой плоскости.

Замѣчаніе. Нѣкоторые авторы кладутъ допущеніе 3-е въ основу слѣдующаго опредѣленія плоскости: если прямая, имѣя съ поверхностью какія угодно двѣ общія точки, всѣми своими точками лежитъ въ этой поверхности, то эта поверхность называется плоскостью.

Теорема 1. Если двѣ точки одной прямой, при наложеніи ея на другую, совпадаютъ съ двумя точками этой послѣдней, то прямыя эти совпадаютъ на всемъ своемъ протяженіи.

Доказательство. Пусть (черт. 2) произвольно выбранныя точки M и N произвольно выбранной прямой AB, по наложеніи этой

прямой на произвольно выбранную прямую CD, совпадаютъ съ точками P и Q этой послѣдней; требуется доказать, что прямая AB совпадетъ съ прямою CD на всемъ своемъ протяженіи.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе допущеніе 5-ое относительно прямой; дѣйствительно: пусть прямая AB наложена на прямую CD такъ, что точка M первой изъ нихъ совпала съ точкою P второй, а точка N первой—съ точкою Q второй. Отъ совпаденія точки M съ точкою P и точки N съ точкою Q получились (допущеніе относительно точекъ) двѣ точки P и Q, а черезъ двѣ точки P и Q (допущеніе 5-е относительно прямой) можно провести только одну прямую линію. Стало-быть, получится въ результатѣ одна прямая CD, т. е. прямая AB совпала съ прямой CD на всемъ своемъ протяженіи. Но прямыя AB и CD взяты произвольно; столь же произвольно взяты точки M и N. Стало-быть: если двѣ точки одной прямой, по наложеніи ея на другую, совпадутъ съ двумя точками этой послѣдней, то прямыя совпадутъ на всемъ своемъ протяженіи. Что и требовалось доказать.



Черт. 2.

Слѣдствіе 1-ое. Если часть одной прямой совпала съ нѣкоторою частью другой, то обѣ прямыя совпадаютъ.—Дѣйствительно: если часть одной прямой совпала съ нѣкоторою частью другой прямой, то двѣ точки одной совпали съ двумя точками другой. А потому обѣ прямыя совпадаютъ.

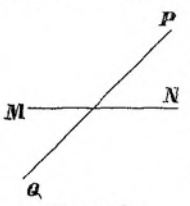
Слѣдствіе 2-ое. Если у двухъ прямыхъ есть какая-нибудь общая точка, то это—либо единственная общая точка этихъ прямыхъ, либо же, кромѣ этой общей точки, у нихъ безчисленное множество общихъ точекъ.—Дѣйствительно, если у нихъ болѣе одной, напр., двѣ общія точки, то эти прямыя совпадутъ на всемъ своемъ протяженіи, а въ такомъ случаѣ у нихъ общихъ точекъ безчисленное множество.

Опредѣленія. *Пересѣкающимися* называются такія двѣ прямыя линіи, у которыхъ только одна общая точка; общая точка двухъ пересѣкающихся прямыхъ называется *точкою пересѣченія*, или просто *пересѣченіемъ* данныхъ прямыхъ. *Равными* называются такія двѣ конечныя прямыя, изъ которыхъ одна можетъ быть наложена на другую такъ, чтобы концы ея совпали съ концами другой.

Слѣдствіе 3-е. Если извѣстно, что нѣкоторая точка находится въ одно и то же время на двухъ несовпадающихъ прямыхъ, то эта точка есть точка пересѣченія этихъ двухъ прямыхъ.—Дѣйствительно: двѣ не совпадающія прямыя могутъ имѣть только одну общую точку,—точку ихъ пересѣченія, стало-быть точка, на-

ходящаяся въ одно время на двухъ прямыхъ, должна и можетъ совпадать только съ точкою ихъ пересѣченія.

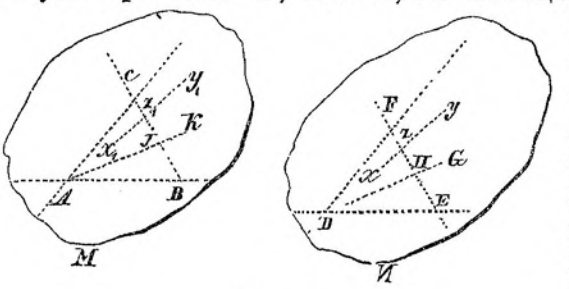
Слѣдствіе 4-ое. Если въ плоскости дана безконечная прямая и даны двѣ точки по разныя стороны прямой, то прямая, соединяющая эти двѣ точки, пересѣкаетъ данную прямую.—Дѣйствительно: если прямая MN и точки P и Q лежатъ въ одной плоскости (черт. 3), причемъ точки P и Q находятся по разныя стороны прямой MN, то (допущеніе 4-е относительно плоскости) прямыя линіи MN и PQ непремѣнно имѣютъ общую точку; но такихъ точекъ у нихъ можетъ быть только одна, потому что если бы ихъ было больше, напр. двѣ, то всѣ точки прямой PQ и прямой MN совмѣстились бы, чего быть не можетъ, такъ какъ точки P и Q лежатъ по условію внѣ прямой MN.



Черт. 3.

Теорема 2. Если три точки, не лежащія на одной прямой и взятыя въ одной плоскости, по наложеніи этой плоскости на другую, совпадаютъ съ тремя точками этой послѣдней, то эти плоскости совпадаютъ на всемъ своемъ протяженіи.

Доказательство. Пусть даны двѣ плоскости M и N (черт. 4) и пусть три точки D, E и F, не лежащія на одной прямой, второй изъ нихъ, по наложеніи ея на первую, совпадаютъ съ точками A, B и C первой; требуется доказать, что плоскости M и N совпадутъ на всемъ своемъ протяженіи, т. е., что всякая точка первой совпадетъ съ какою-либо точкою второй и, обратно, всякая точка второй совпадетъ съ нѣкоторою точкою первой.—Для доказательства этого чрезъ точки D, E и F плоскости N проведемъ прямыя: DE, EF и DF и разсмотримъ—куда упадутъ точки плоскости N по наложеніи ея на плоскость M, если точка D совпадетъ съ точкою A, точка E—съ точкою B, и точка F—съ точкою C. Прямая DE совпадетъ съ прямою AB, прямая EF — съ прямою BC, прямая DF—съ прямою AC (теорема 1); слѣдовательно всѣ точки прямыхъ DE, EF и DF и ихъ продолженій совпадутъ съ нѣкоторыми точками плоскости M. Разсмотримъ теперь точку G той же плоскости N, лежащую внѣ фигуры DEF. Соединивъ ее съ точкою D, найдемъ, что прямая GD пересѣчетъ прямую EF



Черт. 4.

въ нѣкоторой точкѣ H. Но, по упомянутомъ наложеніи плоскости N на плоскость M, точка H совмѣстилась съ нѣкоторою точкою J, такъ какъ EF совмѣстилась съ BC, а точка D совмѣстилась съ точкою A плоскости M; стало-быть (допущеніе 3-е относительно плоскости), прямая HD совмѣстилась съ прямою JA на всемъ протяженіи. Но прямая JA лежитъ въ плоскости M; стало-быть, точка G плоскости N должна совмѣститься съ нѣкоторою точкою K плоскости M. Точно такъ же можно доказать, что всякая другая точка плоскости N, лежащая внѣ фигуры DEF, совпадетъ съ нѣкоторою точкою плоскости M.—Теперь разсмотримъ точку X, лежащую въ плоскости N, но внутри фигуры DEF; требуется доказать, что и она тоже совпадетъ съ нѣкоторою точкою плоскости M. Для доказательства этого возьмемъ какую-либо точку Y въ той же плоскости N, но внѣ фигуры DEF, и соединимъ ее съ точкою X той же плоскости прямою YX. Эта прямая пересѣчетъ прямую FE въ нѣкоторой точкѣ Z (слѣдствіе 4-ое теоремы 1-ой). Но упомянутомъ наложеніи плоскости N на плоскость M точка Y совпадетъ, какъ это выше доказано, съ нѣкоторою точкою Y_1 плоскости M. Кромѣ того, точка Z прямой XY совпадетъ съ нѣкоторою точкою Z_1 плоскости M. Стало-быть, прямая YZ упадетъ на плоскость M и займетъ въ ней положеніе нѣкоторой прямой Y_1Z_1; слѣдовательно и точка X прямой YZ совпадетъ съ нѣкоторою точкою X_1 плоскости M (допущеніе 3-е относительно плоскости).

Такимъ образомъ всякая точка плоскости N, по надлежащемъ наложеніи послѣдней на плоскость M (лежитъ ли точка на одной изъ прямыхъ, соединяющихъ три точки плоскости N, или же внѣ ихъ, или же наконецъ внутри фигуры DEF), совпадаетъ съ нѣкоторою точкою плоскости M. Точно такъ же докажемъ, что всякая точка плоскости M, по надлежащемъ наложеніи этой плоскости на плоскость N, совпадетъ съ нѣкоторою точкою плоскости N. Стало-быть, если три точки, не лежащія на одной прямой и взятыя въ одной плоскости, по наложеніи этой плоскости на другую, совпадаютъ съ тремя точками этой послѣдней, то плоскости совпадаютъ на всемъ своемъ протяженіи. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1-ое. Чрезъ три точки, не лежащія на одной прямой, можно провести плоскость, и притомъ только одну плоскость.—Дѣйствительно: проведемъ чрезъ двѣ изъ этихъ точекъ прямую (допущеніе 4-ое относительно прямой); чрезъ эту прямую проведемъ какую-нибудь плоскость (допущеніе 1-ое относительно плоскости) такъ, чтобы третья точка лежала внѣ плоскости; примемъ прямую за ось и приведемъ плоскость во вращеніе (допущеніе 7-ое

относительно прямой) вокругъ этой оси. Плоскость когда-нибудь непремѣнно займетъ такое положеніе, что третья точка совмѣстится съ нѣкоторою ея точкою (допущеніе 5-ое относительно плоскости). Такимъ образомъ доказано, что чрезъ три точки, не лежащія на одной прямой, можно провести плоскость. Что чрезъ нихъ можно провести только одну плоскость, въ томъ можно убѣдиться слѣдующимъ образомъ: если бы мы могли провести чрезъ нихъ еще одну плоскость, то мы получили бы двѣ плоскости, у которыхъ три общія точки, не лежащія на одной прямой. А такія двѣ плоскости вполнѣ совмѣщаются и образуютъ одну плоскость.

Слѣдствіе 2-ое. Чрезъ двѣ пересѣкающіяся прямыя можно провести плоскость, и притомъ только одну плоскость.—Дѣйствительно: если даны двѣ пересѣкающіяся прямыя, то, взявъ ихъ точку пересѣченія и взявъ, кромѣ того, одну точку на одной изъ нихъ и другую—на другой, получимъ три точки, не лежащія на одной прямой. А чрезъ три точки, не лежащія на одной прямой, можно провести плоскость, и притомъ только одну плоскость.

Замѣчаніе 1-ое. Теорему 2-ую вмѣстѣ съ ея слѣдствіями не принято излагать въ началѣ курса Геометріи, такъ какъ доказательство ея довольно трудно. Но ею всегда пользуются при дальнѣйшемъ изложеніи. Поэтому во всякомъ случаѣ необходимо знать сущность теоремы и вполнѣ понимать ея смыслъ; доказательство же ея приведено здѣсь лишь для большей научной строгости.

Замѣчаніе 2-ое. Слѣдствіе 2-ое теоремы 2-ой часто выражаютъ такъ: три точки, не лежащія на одной прямой, опредѣляютъ нѣкоторую плоскость. Это значитъ, что если даны три такія точки, то дана также и плоскость, и притомъ единственная, вполнѣ опредѣленная плоскость, которая можетъ быть проведена чрезъ эти три точки.

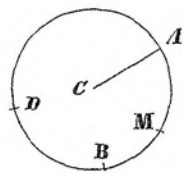
§ 2. Понятіе объ окружности и о дѣйствіяхъ надъ отрѣзками прямыхъ линій.

Опредѣленія. *Плоскою* называется линія, всѣ точки которой лежатъ въ одной и той же плоскости. Пусть напр. въ плоскости какая либо точка движется какимъ нибудь образомъ, не выходя изъ нея. Точка, движущаяся въ плоскости какимъ бы то ни было образомъ, опишетъ нѣкоторую плоскую линію. Если плоская линія заключаетъ въ себѣ всѣ точки, находящіяся на

одномъ и томъ же разстояніи отъ нѣкоторой неподвижной точки, лежащей въ той же плоскости, то эта плоская линія называется *окружностью* или *круговою линіею*. Та точка въ той же плоскости, отъ которой всѣ точки окружности находятся на одномъ и томъ же разстояніи, называется *центромъ*.

Если въ какой либо линіи находятся всѣ безъ исключенія точки, удовлетворяющія какому-нибудь опредѣленному условію, и если притомъ всякая точка этой линіи удовлетворяетъ этому условію, то такая линія называется *геометрическимъ мѣстомъ* точекъ, удовлетворяющихъ данному условію. Всякая точка данной окружности удовлетворяетъ тому условію, что она находится въ такомъ же разстояніи отъ центра, въ какомъ находятся отъ него и другія точки той же окружности; кромѣ того, ни внѣ, ни внутри окружности нѣтъ ни одной точки, которая находилась бы въ такомъ же разстояніи отъ центра, въ какомъ находятся точки окружности. Поэтому окружность можно опредѣлить слѣдующимъ образомъ: окружностью, или круговою линіею, называется геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, находящихся въ данной плоскости отъ нѣкоторой неподвижной ея точки въ нѣкоторомъ данномъ разстояніи.

Конечная часть плоскости, ограниченная окружностью, называется *кругомъ*. Отрѣзокъ окружности, ограниченный двумя ея точками, называется *дугою*. Отрѣзокъ прямой, соединяющій центръ круга съ какою-нибудь точкою окружности, называется радіусомъ окружности (или круга). Такъ (черт. 5), если линія AMBDA—окружность, а точка C—ея центръ, то отрѣзки AM, MB, BD, DA этой окружности суть дуги, прямая же CA—одинъ изъ радіусовъ ея.



Черт. 5.

Допущенія относительно окружности. Относительно окружности въ начальной Геометріи дѣлаются слѣдующія допущенія:

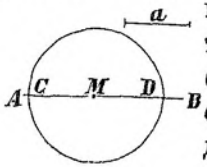
1) всякую точку на плоскости можно принять за центръ окружности, а всякую конечную прямую—за ея радіусъ;

2) окружность есть линія замкнутая.

Замѣчаніе. Для проведенія на чертежѣ окружности употребляется извѣстный приборъ, называемый *циркулемъ*.

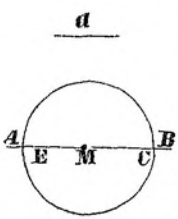
Лемма 1-ая. Если въ плоскости дана безконечная прямая, а на этой прямой какая-либо точка, и если эту точку принять за центръ какой-нибудь окружности, проведенной въ той же плоскости, то эта окружность пересѣчетъ данную безконечную прямую въ двухъ, и притомъ только въ двухъ точкахъ.

Доказательство. Пусть въ плоскости (черт. 6) дана прямая AB и точка M на ней; пусть точка M принята за центръ окружности, проведенной въ той же плоскости радіусомъ, длина котораго равна, напр., a ед. длины; требуется доказать, что эта окружность пересѣчетъ данную прямую AB въ двухъ, и притомъ только въ двухъ точкахъ.—Для доказательства этого отложимъ отъ точки M по обѣ стороны ея отрѣзки, равные a ед. мѣры. Окружность радіуса, равнаго a ед., есть въ этомъ случаѣ геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, отстоящихъ отъ точки M на разстояніи a ед.; стало-быть, точки C и D также должны лежать на этой окружности; такимъ образомъ у данной прямой и проведенной нами окружности двѣ общія точки C и D, т. е. первая половина теоремы доказана. Остается доказать, что данныя прямая и окружность пересѣкаются только въ этихъ двухъ точкахъ. Для доказательства этого предположимъ, что у нихъ есть еще одна общая точка B, лежащая внѣ отрѣзка CD; но въ такомъ случаѣ отрѣзокъ MB долженъ былъ бы равняться тоже a ед., чего быть не можетъ, такъ какъ $MB > MD$, а $MD = a$ ед. Такъ же невозможно, чтобы окружность пересѣкла прямую AB въ точкѣ, лежащей между точками C и D. А потому окружность пересѣкаетъ прямую въ двухъ, и притомъ только въ двухъ точкахъ. Что и требовалось доказать.



Черт. 6.

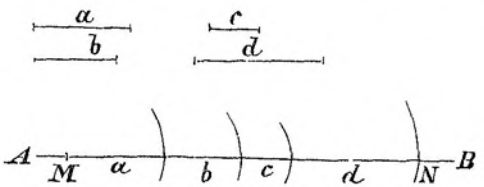
Задача 1. Отложить на данной прямой AB, лежащей въ данной плоскости, отъ данной точки M этой прямой, отрѣзокъ, равный данному отрѣзку a.



Черт. 7.

Рѣшеніе. Принявъ (черт. 7) точку M за центръ, опишемъ въ данной плоскости радіусомъ, равнымъ отрѣзку a, окружность. Эта окружность пересѣчетъ прямую AB въ точкахъ C и E и при этомъ отрѣзокъ MC, а также отрѣзокъ ME, будутъ порознь равны отрѣзку a. Итакъ, мы получили два отрѣзка MC и ME, удовлетворяющіе требованію задачи.

Задача 2. Сложить прямыя a, b, c и d.



Черт. 8.

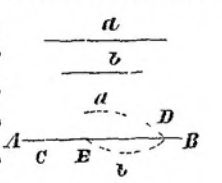
Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи отложимъ на какой-нибудь прямой AB (черт. 8) по порядку всѣ данные отрѣзки *въ одномъ и томъ же направленіи*,—при томъ такъ, чтобы начало приба-

вляемаго отрѣзка совпадало съ концомъ предыдущаго. Такимъ образомъ мы получимъ прямую MN, равную суммѣ отрѣзковъ a, b, c и d.

Замѣчаніе. Въ какомъ направленіи откладывать слагаемые отрѣзки, конечно, все равно; но въ Геометріи обыкновенно за положительное принимается направленіе отъ лѣвой руки къ правой, если выборъ можетъ быть сдѣланъ въ этомъ смыслѣ.

Задача 3. Найти разность между прямыми a и b.

Рѣшеніе. Пусть отрѣзокъ a больше отрѣзка b (черт. 9). Для рѣшенія этой задачи уменьшаемый отрѣзокъ откладывается на нѣкоторую прямую AB въ нѣкоторомъ направленіи, напр., слѣва направо. Пусть этотъ отрѣзокъ займетъ положеніе прямой CD. Потомъ откладываютъ вычитаемый отрѣзокъ отъ точки D по направленію прямо-противоположному, т. е. справа налѣво. Пусть отрѣзокъ b займетъ положеніе отрѣзка DE; тогда отрѣзокъ CE составляетъ разность между a и b.



Черт. 9.

Замѣчаніе. Если вычитаемый отрѣзокъ равенъ уменьшаемому, то разность ихъ считается равной нулю; если вычитаемое меньше уменьшаемаго, разность считается положительною; если же вычитаемое больше уменьшаемаго, то разность считается отрицательною.

Задача 4. Умножить прямую a на цѣлое число N.

Рѣшеніе. Дѣйствіе умноженія даннаго отрѣзка прямой на какое-либо цѣлое число можно свести къ нахожденію суммы столькихъ слагаемыхъ, сколько въ данномъ цѣломъ числѣ единицъ, при чемъ каждое слагаемое должно равняться данному множимому.

Замѣчаніе. Для умноженія даннаго отрѣзка на дробное число надо знать дѣленіе конечной прямой на столько равныхъ частей, сколько единицъ въ знаменателѣ дроби. Для раздѣленія же конечной прямой на равныя между собою части недостаточно того умѣнія пользоваться линейкой и циркулемъ, которое достаточно для сложенія отрѣзковъ прямой линіи, для вычитанія ихъ и для умноженія даннаго отрѣзка прямой линіи на какое угодно цѣлое число. Поэтому рѣшеніе задачи на умноженіе даннаго отрѣзка прямой линіи на дробное число изложено въ другомъ мѣстѣ, въ связи съ ученіемъ о дѣленіи отрѣзка прямой на любое цѣлое число равныхъ между собою частей.

§ 3. Объ углахъ.

Опредѣленія. Двѣ прямыя, проведенныя въ плоскости изъ одной ея точки не въ одномъ и томъ же и не въ прямо-противоположныхъ направленіяхъ, раздѣляютъ плоскость на двѣ, отли-

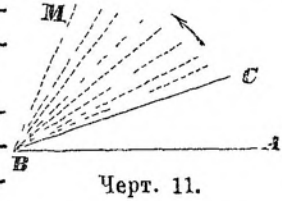
чающіяся одна отъ другой, части. Разсматривая одну изъ этихъ частей, мы получаемъ понятіе *о прямолинейномъ углѣ*, образованномъ двумя прямыми. Понятіе угла принадлежитъ однако же къ числу понятій основныхъ, первопачальныхъ, не поддающихся опредѣленію. Прямыя, образующія прямолинейный уголъ, называются *сторонами* или *боками* угла, а точка, изъ которой проведены эти прямыя— его *вершиною*. Когда говорятъ объ углѣ, образованномъ двумя прямыми линіями, проведенными въ плоскости изъ точки, взятой на этой плоскости, то при этомъ не обращаютъ никакого вниманія на длину его сторонъ. Для письменнаго и устнаго обозначенія угловъ, на чертежѣ чаще всего ставятся три буквы: одна у вершины и по одной у каждой изъ сторонъ его. При этомъ буква, стоящая у вершины угла, при устномъ обозначеніи произносится между остальными двумя буквами; при письменномъ же обозначеніи эти буквы записываются согласно устному. Такъ, напр., (черт. 10) уголъ, изображенный на этомъ чертежѣ, называется либо угломъ ABC, либо угломъ CAB. Впрочемъ, если вершина какого-нибудь угла не служитъ въ то же время вершиною и другого угла, то уголъ можетъ быть обозначенъ и часто обозначается одною лишь буквою, стоящею у его вершины. Когда говорятъ „уголъ“, то этимъ словомъ для краткости замѣняютъ два слова: прямолинейный уголъ. Слово „уголъ“ на письмѣ иногда замѣняется знакомъ $\angle$.

Черт. 10.

Наложить одинъ уголъ на другой значитъ наложить плоскость перваго угла на плоскость второго такъ, чтобы вершина и одна изъ сторонъ перваго угла совпала съ вершиною и одной изъ сторонъ второго, а вторая сторона перваго легла на плоскость второго угла, но непремѣнно по ту же сторону совпавшихъ боковъ, по которую лежитъ второй бокъ второго, неподвижнаго, угла. При этомъ могутъ быть слѣдующіе случаи: 1) вторая сторона угла наложеннаго можетъ лечь внутри второго (неподвижнаго) угла, 2) она можетъ лечь внѣ второго угла, 3) она можетъ совпасть со второю стороною второго угла. *Равными* называются углы, изъ которыхъ одинъ можетъ быть наложенъ на другой такъ, чтобы вершина и стороны одного угла соотвѣтственно совмѣстились съ вершиною и сторонами другого. Если, по надлежащемъ наложеніи одного угла на другой, остальныя двѣ стороны не совмѣстились, то говорятъ, что уголъ, внутри котораго находится несовмѣстившаяся сторона другого угла, *больше* этого послѣдняго.

Пусть данъ $\angle$ ABC (черт. 11), пусть сторона AB остается неподвижною, а сторона BC вращается въ плоскости угла вокругъ

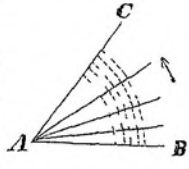
точки B и переходитъ постепенно на мѣста, обозначенныя на чертежѣ пунктированными линіями. Вновь полученный такимъ образомъ ∠ ABM по предыдущему больше даннаго угла ABC.



Черт. 11.

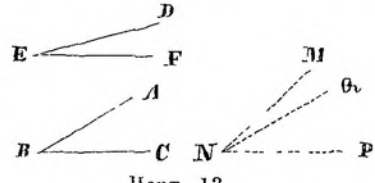
Такимъ образомъ всякій уголъ принимается за нѣкоторую *величину*, которая зависитъ исключительно отъ взаимнаго *отклоненія* (или наклоненія) сторонъ.

Всякій уголъ можно разсматривать такъ, какъ будто онъ образовался отъ вращенія въ плоскости нѣкоторой прямой, выходящей изъ точки, данной въ той же плоскости. Если представить себѣ, что уголъ образуется неподвижною прямою, выходящею изъ неподвижной точки, и подвижною, проходящею чрезъ ту же точку и притомъ движущеюся такъ, что каждая точка ея описываетъ часть окружности (черт. 12), то можно условиться *положительнымъ* угломъ считать уголъ, образованный движеніемъ, обратнымъ движенію часовой стрѣлки, а *отрицательнымъ*—уголъ, образованный движеніемъ того же направленія, что̀ движеніе часовой стрѣлки.



Черт. 12.

Суммою двухъ угловъ ABC и DEF (черт. 13) называется уголъ MNP, который получается слѣдующимъ образомъ: начертивъ ∠ QNP, который равенъ углу ABC, наложимъ уголъ DEF на плоскость угла QNP такъ, чтобы вершина E совпала съ вершиною N, сторона EF—со стороною NQ, а сторона ED заняла бы положеніе NM, т. е. чтобы углы MNQ и QNP были взяты въ одномъ и томъ же смыслѣ (съ однимъ и тѣмъ же знакомъ).



Черт. 13.

Сложить два угла значитъ найти ихъ сумму. *Вычесть* одинъ уголъ изъ другого значитъ, принявъ второй за сумму, а первый—за одно ея слагаемое, найти второе слагаемое.

При сложеніи двухъ угловъ можетъ случиться, чтобы послѣ того, какъ сложеніе выполнено, первая сторона перваго слагаемаго угла и вторая второго, имѣя прямо противоположныя направленія, составляли одну прямую линію. Для большей общности условились принимать, что двѣ прямыя, проведенныя въ плоскости изъ нѣкоторой точки ея, въ прямо противоположныхъ направленіяхъ, тоже образуютъ уголъ, который въ отличіе отъ другихъ угловъ нѣкоторые авторы называютъ *выпрямленнымъ угломъ*. Уголъ, меньшій выпрямленнаго, называютъ *выпуклымъ* угломъ. Если отъ сло-

женія двухъ или нѣсколькихъ угловъ получается сумма, бо́льшая выпрямленнаго угла, то и эту сумму, для большей общности, условились называть тоже угломъ, но, въ отличіе отъ угла выпрямленнаго и отъ выпуклаго угла, его называютъ угломъ *вогнутымъ*. Наконецъ, если отъ сложенія угловъ получается въ результатѣ, что вторая сторона послѣдняго слагаемаго совпадаетъ съ первою перваго слагаемаго, то и въ этомъ случаѣ полученную сумму принято считать за уголъ, который, въ отличіе отъ выпуклыхъ, выпрямленныхъ и вогнутыхъ угловъ, называютъ *полнымъ*.

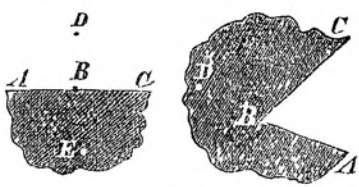
При вычитаніи двухъ угловъ въ результатѣ вообще получается уголъ положительный или отрицательный; но если вычитаемое равно уменьшаемому, то полученный результатъ, хотя онъ и равенъ нулю, все-таки, для большей общности, называютъ угломъ, прибавляя при этомъ, что это—уголъ, равный нулю.

Замѣчаніе 1-ое. Такимъ образомъ сложеніе и вычитаніе угловъ приводятъ къ обобщенію понятія объ углѣ. Принимая это обобщеніе во вниманіе, въ Геометріи установлено, что двѣ прямыя, лежащія въ одной плоскости и выходящія изъ одной ея точки, образуютъ два угла, каково бы ни было направленіе этихъ прямыхъ.

Замѣчаніе 2-ое. Какъ на самомъ дѣлѣ выполняется сложеніе или вычитаніе угловъ—здѣсь показано быть не можетъ. Рѣшеніе этихъ задачъ отнесено къ другому параграфу этой книги.

Замѣчаніе 3-е. Въ начальной Геометріи обыкновенно не принято различать положительное и отрицательное значеніе угла; но это ученіе настолько просто, что можетъ быть введено съ большою пользою въ систему начальной Геометріи.

Замѣчаніе 4-е. Для устнаго и письменнаго обозначенія выпрямленныхъ и вогнутыхъ угловъ полезно употреблять четыре (а не три) буквы, изъ которыхъ первая и послѣдняя указываютъ стороны, вторая—вершину, а третья обозначаетъ какую-либо точку, лежащую внутри даннаго угла. Такъ (черт. 14), если линія AC есть прямая, то ABDC обозначаетъ одинъ, а ABEC—другой изъ выпрямленныхъ угловъ, образованныхъ при вершинѣ B; если прямыя AB и BC не составляютъ одной прямой, то совокупность буквъ ABC обозначаетъ выпуклый уголъ, а ABDC—вогнутый, образованный прямыми BA и BC.



Черт. 14.

Замѣчаніе 5-е. Благодаря введенію понятія о положительномъ и отрицательномъ значеніяхъ угла, можно установить слѣдующее опредѣленіе наложенія угла: наложить одинъ уголъ на другой зна-

чить наложить первый изъ нихъ на второй такъ, чтобы вершина и одна изъ сторонъ перваго совпали съ вершиной и одной изъ сторонъ второго, а другая сторона накладываемаго угла образовала бы уголъ того же направленія, что и первый, неподвижный, уголъ.

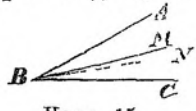
Допущеніе относительно угловъ. Относительно прямолинейныхъ угловъ въ Геометріи дѣлается слѣдующее допущеніе: всякій уголъ раздѣляется на данное число равныхъ между собою частей нѣкоторыми, вполнѣ опредѣленными, прямыми, выходящими изъ его вершины.

Замѣчаніе. Съ помощью линейки и циркуля, какъ мы это увидимъ ниже, можно раздѣлить всякій уголъ пополамъ, нѣкоторые углы—на три равныя части. Раздѣлить же всякій уголъ на любое число равныхъ между собою частей—съ помощью линейки и циркуля невозможно. Но тѣмъ не менѣе въ Геометріи допускается, что *существуютъ* прямыя, раздѣляющія всякій уголъ на любое число равныхъ между собою частей, ибо въ существованіи такихъ прямыхъ сомнѣваться невозможно.

Опредѣленіе. Прямая, раздѣляющая данный уголъ пополамъ, называется *равнодѣлящею* этого угла, или же *биссектрисою* его.

Теорема 3. Если данъ какой-либо опредѣленный уголъ, то только одна прямая есть его равнодѣлящая.

Доказательство. Пусть данъ уголъ ABC (черт. 15); пусть прямая BM—его равнодѣлящая, т. е. пусть она раздѣляетъ этотъ уголъ на два равныхъ угла ABM и MBC; требуется доказать, что всякая другая линія, проведенная изъ той же вершины, не дѣлитъ уголъ ABC на двѣ равныя между собою части.



Черт. 15.

—Для доказательства этого предположимъ, что прямая BN тоже дѣлитъ $\angle$ ABC на двѣ равныя части. Въ такомъ случаѣ (аксіома 11-я)

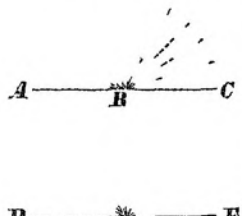
$$\angle ABM = \angle ABN,$$

чего быть не можетъ (аксіома 1-ая). А потому невозможно также, чтобы прямая BN тоже была равнодѣлящею даннаго угла. Стало-быть, у каждаго угла есть только одна равнодѣлящая. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Способъ доказательства, основанный на томъ, что доказывается невозможность предположенія, прямо противорѣчащаго тому, что надо доказать въ данной теоремѣ, называется *способомъ доказательства отъ противоположнаго* или *способомъ приведенія къ нельпости*. Выше употребленъ для доказательства теоремы 3-ей способъ отъ противоположнаго. Тотъ же пріемъ употребленъ нами при доказательствѣ леммы 1-ой, о пересѣченіи окружности съ прямою, на которой лежитъ ея центръ.

Теорема 4. Всѣ выпрямленные углы равны между собою.

Доказательство. Пусть (черт. 16) даны два выпрямленныхъ угла ABC и DEF (на чертежѣ эти выпрямленные углы для ясности заштрихованы); требуется доказать, что $\angle ABC = \angle DEF$.—Для доказательства этого наложимъ $\angle ABC$ на $\angle DEF$ такъ, чтобы вершина B совпала съ вершиною E, а сторона BC пошла по сторонѣ EF; тогда сторона BA пойдетъ по сторонѣ ED, потому что часть прямой AC совпала съ частью прямой DF (слѣдствіе 1-ое теоремы 1-ой); такимъ образомъ, стороны одного угла совпали, по наложеніи его на другой, со сторонами другого. Стало-быть, $\angle ABC = \angle DEF$. Что и требовалось доказать.



Черт. 16.

Опредѣленія. *Постоянной* называется величина, которая не можетъ принимать различныхъ значеній, а *перемѣнною*—величина, которой значенія могутъ быть различны. Такъ, напр., уголъ вообще есть перемѣнная величина, а всякій данный уголъ, въ томъ числѣ и уголъ выпрямленный — величина постоянная. *Прямымъ угломъ* называется уголъ, равный половинѣ выпрямленнаго угла.

Замѣчаніе. Какъ раздѣлить выпрямленный уголъ пополамъ—мы увидимъ ниже.

Теорема 5. Всѣ прямые углы равны между собою.

Доказательство. Пусть даны два прямыхъ угла; требуется доказать, что они равны между собою.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что всякій прямой уголъ есть половина нѣкотораго выпрямленнаго; всѣ выпрямленные углы равны между собою (теорема 4-ая); стало-быть, и всѣ прямые углы тоже между собою равны (аксіома 11-ая). Что и требовалось доказать.

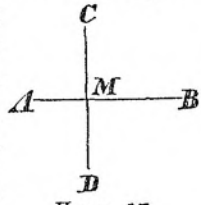
Опредѣленія. Всякій уголъ, который меньше прямого, называется *острымъ*; всякій уголъ, который больше прямого, но меньше выпрямленнаго, называется *тупымъ*.

Замѣчаніе. Величина прямого угла есть величина постоянная; ее принято обозначать буквою d латинскаго алфавита (начальною буквою слова droit, означающаго по-французски „прямой“).

Теорема 6. Если двѣ прямыя, взятыя въ одной и той же плоскости, взаимно пересѣкаются и если одинъ изъ образованныхъ при этомъ угловъ есть уголъ прямой, то и остальные три угла тоже прямые.

Доказательство. Пусть (черт. 17) прямыя AB и CD лежатъ въ плоскости чертежа и пересѣкаются въ точкѣ M и пусть при этомъ одинъ изъ угловъ, напр., $\angle AMC = d$: требуется доказать,

го каждый изъ остальныхъ угловъ CMB, AMD и DMB — тоже прямой уголъ.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что если $\angle AMC = d$, то и $\angle CMB = d$, какъ вторая половина выпрямленнаго угла AMCB, котораго одну половину составляетъ $\angle AMC$; точно также $\angle AMD = d$, какъ вторая половина другого выпрямленнаго угла CMAD, котораго одну половину оставляетъ $\angle AMC$; наконецъ, и $\angle DMB = d$ какъ вторая половина выпрямленнаго угла AMDB, котораго первую половину составляетъ $\angle AMD$. Такимъ образомъ каждый изъ остальныхъ угловъ CMB, AMD и DMB—есть уголъ прямой. Что и требовалось доказать.

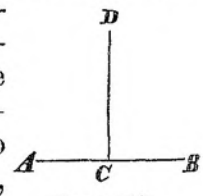


Черт. 17.

Опредѣленіе. Двѣ прямыя, лежащія въ одной плоскости, называются *взаимно-перпендикулярными* прямыми, если онѣ образуютъ одна съ другою прямые углы. Поэтому говорятъ, что стороны прямого угла взаимно-перпендикулярны. Прямая, перпендикулярная къ другой, называется также *перпендикуляромъ* къ ней.

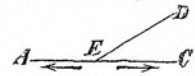
Теорема 7. Если дана точка на прямой, лежащей въ плоскости, то изъ этой точки въ данной плоскости къ этой прямой можетъ быть проведенъ только одинъ перпендикуляръ.

Доказательство. Пусть (черт. 18) дана прямая AB, находящаяся въ плоскости чертежа, и точка C на этой прямой; пусть прямая CD перпендикулярна къ прямой AB; требуется доказать, что всякая другая прямая, выходящая изъ той же точки и лежащая въ той же плоскости, не перпендикулярна къ данной прямой.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что прямая CD раздѣляетъ уголъ ACDB пополамъ, а у всякаго угла есть только одна равнодѣляющая (теорема 3-я) Стало-быть, изъ точки C, взятой на прямой AB, въ данной плоскости можетъ быть проведенъ только одинъ перпендикуляръ. Тѣ же разсужденія могутъ быть повторены относительно всякой прямой и всякой точки взятой на ней, а потому изъ данной точки, взятой на прямой, лежащей въ данной плоскости, въ этой плоскости къ этой прямой можетъ быть проведенъ только одинъ перпендикуляръ. Что и требовалось доказать.



Черт. 18.

Опредѣленіе. Углы, у которыхъ вершина и одна сторона общія, а прочія двѣ стороны лежатъ на одной прямой и въ прямо противоположныхъ другъ другу направленіяхъ называются *смежными углами*. Такъ (черт. 19), если стороны EA и EC лежатъ на одной прямой и прямо противоположны другъ другу по направленію, то сторона ED есть



Черт. 19.

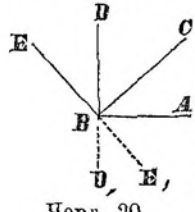
общая сторона данныхъ двухъ угловъ AED и DEC, вершина E—ихъ общая вершина, а углы AED и DEC—углы смежные.

Теорема 8. Если данные углы—углы смежные, то сумма ихъ равна $2d$.

Доказательство. Пусть $\angle AEC$ и $\angle CED$ — углы смежные; требуется доказать, что сумма ихъ равна $2d$.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что сумма двухъ смежныхъ угловъ равна выпрямленному, а выпрямленный уголъ равенъ двумъ прямымъ, слѣдовательно (аксіома 5-я) сумма двухъ смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ. Что и требовалось доказать.

Теорема 9. Если изъ вершины остраго угла въ той же плоскости провести перпендикуляры къ сторонамъ его, то одинъ изъ угловъ, образованныхъ этими перпендикулярами другъ съ другомъ, есть уголъ острый.

Доказательство. Пусть (черт. 20) $\angle ABC$ острый; пусть изъ точки B проведены прямая DD_1, перпендикулярная къ прямой AB, и прямая EE_1, перпендикулярная къ BC; требуется доказать, что одинъ изъ угловъ DBE, DBE_1, E_1BD_1 и D_1BE есть уголъ острый.—Для доказательства этого разсмотримъ любой изъ этихъ угловъ, напр., $\angle DBE$. Принявъ во вниманіе, что $\angle CBE$ есть уголъ прямой, получимъ, что



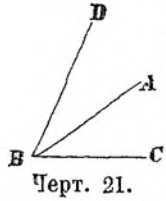
Черт. 20.

$$\angle DBE = d - \angle CBD.$$

Стало-быть, $\angle DBE$ острый. Если бы мы разсмотрѣли вмѣсто угла DBE другой уголъ, напр., DBE_1, то мы убѣдились бы, что онъ тупой, и что такимъ образомъ $\angle DBE$ или $\angle D_1BE_1$—углы острые. Стало-быть, если изъ вершины остраго угла въ той же плоскости проведены перпендикуляры къ сторонамъ его, то одинъ изъ угловъ, образованныхъ этими перпендикулярами другъ съ другомъ, есть уголъ острый. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Эта теорема справедлива также и для перпендикуляровъ, проведенныхъ въ плоскости тупого угла къ сторонамъ его; ибо стоитъ только продолжить одинъ изъ боковъ тупого угла въ противоположную сторону, и мы получимъ разсмотрѣнный случай.

Опредѣленіе. *Прилежащими другъ къ другу* называются два угла, у которыхъ общая вершина и общій бокъ, а прочіе два бока лежатъ по разныя стороны этого общаго бока. Такъ (черт. 21) ABC и ABD суть прилежащіе углы, а ABC и DBC не представляютъ угловъ прилежащихъ. О двухъ углахъ, сумма которыхъ равна одному прямому (или двумъ прямымъ) говорятъ, что *они дополняютъ другъ друга до одного прямого (до двухъ*

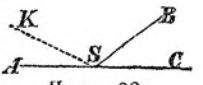


Черт. 21.

прямыхъ); нѣкоторые называютъ углы перваго рода *взаимно-дополнительными*, а углы второго рода—*взаимно-пополнительными* углами.

Теорема 10, (обратная теоремѣ 8-ой). Если два прилежащихъ другъ къ другу угла взаимно дополняютъ другъ друга до двухъ прямыхъ, то такіе углы суть углы смежные.

Доказательство. Пусть (черт. 22) углы BSC и BSA суть углы, прилежащіе другъ къ другу, и пусть далѣе



Черт. 22.

$$\angle BSA + \angle BSC = 2d;$$

требуется доказать, что прямыя AS и CS составляютъ одну прямую линію.—Для доказательства этого предположимъ, что SA не составляетъ продолженія прямой CS; но въ такомъ случаѣ ея продолженіемъ должна быть какая-нибудь другая прямая линія. Предположимъ, напр., что KS составляетъ продолженіе линіи CS; тогда (теорема 8-ая)

$$\angle KSB + \angle BSC = 2d.$$

Откуда выводимъ, что (аксіома 6-ая):

$$\angle ASB + \angle BSC = \angle KSB + \angle BSC;$$

отнявъ отъ этихъ равныхъ суммъ поровну, а именно по углу BSC' получимъ (аксіома 8-ая), что

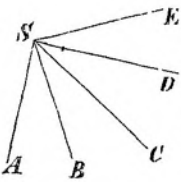
$$\angle ASB = \angle KSB,$$

т. е. получимъ, что цѣлое равно своей части, чего быть не можетъ (аксіома 1-ая). Стало-быть, предположеніе, сдѣланное нами, несправедливо, т. е. прямая KS не можетъ быть продолженіемъ прямой SC. Точно такъ-же убѣдимся, что никакая другая прямая, кромѣ прямой SA, не можетъ быть продолженіемъ прямой SC; слѣдовательно прямая SA должна быть продолженіемъ прямой SC. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Въ составъ всякой теоремы входятъ одно или нѣсколько *условій* и одинъ *выводъ*, или *заключеніе*. Такъ, напр., въ теоремѣ, что всѣ прямые углы равны между собою, условіе состоитъ въ томъ, что данные углы суть углы прямые, а выводъ—въ томъ, что они равны между собою. Болѣе явственнымъ дѣлается составъ этой теоремы тогда, когда она выражена въ слѣдующей формѣ: если данные углы — прямые, то эти углы равны между собою. Предложеніе, въ которомъ одно изъ условій данной теоремы является выводомъ, а выводъ—однимъ изъ условій ея, называется, по отношенію къ данной теоремѣ, *обратнымъ предложеніемъ*. Такъ, напр., предложеніе, обратное теоремѣ о равенствѣ прямыхъ угловъ, гласитъ: если данные углы равны между собою, то они прямые. Но это предложеніе не справедливо, такъ какъ два угла могутъ быть равны между собою, вовсе не будучи прямыми углами. Однако бываютъ

случаи, когда предложеніе, обратное данной теоремѣ, тоже справедливо; тогда это предложеніе называется *обратной теоремой*. Такъ, напр., теорема 8-ая гласитъ такъ: если два прилежащихъ другъ къ другу угла суть углы смежные, то сумма ихъ равна двумъ прямымъ. Обратное этой теоремѣ предложеніе гласитъ такъ: если сумма данныхъ двухъ угловъ равна двумъ прямымъ и если это углы прилежащіе, то данные углы смежные. Это обратное предложеніе справедливо, и потому оно представляетъ собою *теорему*, обратную теоремѣ 8-ой.

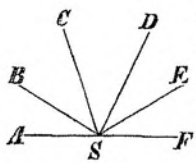
Опредѣленіе. *Послѣдовательно-лежащими* условимся называть углы, имѣющіе общую вершину и лежащіе въ одной плоскости такъ, что, считая въ извѣстномъ направленіи, вторая сторона перваго угла составляетъ первую сторону второго угла, вторая сторона второго угла первую третьяго и т. д., т. е. лежащіе такъ, что всѣ углы представляютъ собою слагаемыя одной и той же суммы. Такъ (черт. 23) углы ASB, BSC, CSD и DSE суть углы послѣдовательно-лежащіе.



Черт. 23.

Теорема 11. Если дано нѣсколько послѣдовательно-лежащихъ угловъ, у которыхъ первая сторона перваго угла и вторая сторона послѣдняго составляютъ одну прямую линію, то сумма всѣхъ этихъ послѣдовательно-лежащихъ угловъ равна $2d$.

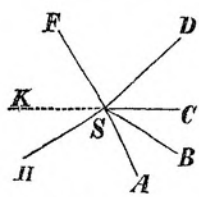
Доказательство. Пусть (черт. 24) даны послѣдовательно-лежащіе углы FSE, ESD, DSC, CSB и BSA и пусть SF и SA составляютъ одну прямую линію; требуется доказать, что сумма ихъ равна $2d$. — Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что сумма всѣхъ этихъ угловъ равна выпрямленному углу, т. е. сумма ихъ равна двумъ прямымъ. Что и требовалось доказать.



Черт. 24.

Замѣчаніе. Эту теорему короче, хотя и менѣе точно, выражаютъ слѣдующимъ образомъ: сумма угловъ, лежащихъ по одну сторону прямой, равна $2d$.

Теорема 12. Сумма послѣдовательно-лежащихъ угловъ, составленныхъ прямыми, выходящими изъ одной точки на плоскости, равна $4d$.



Черт. 25.

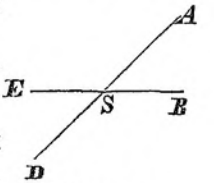
Доказательство. Пусть (черт. 25) даны послѣдовательно лежащіе углы ASB, BSC, CSD, DSF, FSH и HSA; требуется доказать, что сумма ихъ равна $4d$. — Для доказательства этого продолжимъ одну изъ сторонъ одного изъ угловъ, напр., сторону

CS угла DSC; получимъ двѣ совокупности угловъ, послѣдовательно-лежащихъ по разныя стороны прямой KC. Сумма данныхъ угловъ равна суммѣ угловъ, такимъ образомъ полученныхъ, (аксіома 3), т. е. равна (теорема 11) $4d$. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Если изъ одной точки на плоскости проведены въ этой плоскости двѣ прямыя, то сумма обоихъ угловъ, при этомъ образованныхъ, равна $4d$.—Дѣйствительно: сумма ихъ равна суммѣ двухъ выпрямленныхъ угловъ.

Замѣчаніе. Термины „выпрямленный уголъ“ и „полный уголъ“, введенные выше, приняты не всѣми авторами по предмету Геометріи; вмѣсто этихъ терминовъ часто говорятъ: уголъ, равный двумъ прямымъ, и уголъ, равный четыремъ прямымъ.

Опредѣленіе. Если каждый изъ боковъ даннаго выпуклаго угла продолжить въ противоположную сторону, то образуется четыре выпуклыхъ угла. Два угла, въ которыхъ стороны одного составляютъ продолженія сторонъ другого, называются *вертикальными* или *противоположными*. Такъ (черт. 26) углы ASB и ESD суть углы вертикальные, если SD есть продолженіе AS, а SE есть продолженіе SB; при тѣхъ же условіяхъ углы ASE и BSD суть тоже углы вертикальные.



Черт. 26.

Теорема 13. Вертикальные углы равны между собою.

Доказательство. Пусть (черт. 26) $\angle$ ASB и $\angle$ DSE суть углы вертикальные; требуется доказать, что

$$\angle \mathrm{ASB} = \angle \mathrm{DSE}.$$

Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что (теорема 8)

$$\angle \mathrm{ASB} + \angle \mathrm{ASE} = 2d.$$

Точно также

$$\angle \mathrm{DSE} + \angle \mathrm{ASE} = 2d.$$

Откуда (аксіома 6-ая)

$$\angle \mathrm{ASB} + \angle \mathrm{ASE} = \angle \mathrm{DSE} + \angle \mathrm{ASE}.$$

Стало-быть (аксіома 8-ая)

$$\angle \mathrm{ASB} = \angle \mathrm{DSE}.$$

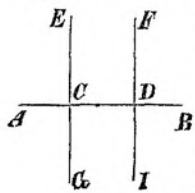
Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Можно условиться вертикальными углами считать не только выпуклые углы, обладающіе тѣмъ свойствомъ, что стороны одного суть продолженія сторонъ другого, но также и вогнутые углы, удовлетворяющіе этому условію. Тогда доказанная выше теорема остается справедливой также и для этого случая.

§ 4. О параллельныхъ линіяхъ.

Теорема 14. Если изъ двухъ точекъ прямой, взятой на плоскости, провести въ этой плоскости двѣ прямыя, перпендикулярныя къ этой прямой, то эти двѣ прямыя не пересѣкутся, какъ бы далеко ихъ ни продолжали.

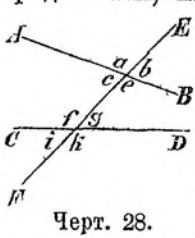
Доказательство. Пусть (черт. 27) дана въ плоскости чертежа прямая линія AB и пусть изъ точекъ C и D этой прямой въ той же плоскости проведены двѣ прямыя CE и DF, перпендикулярныя къ прямой AB; требуется доказать, что эти двѣ прямыя не могутъ пересѣчься, какъ бы далеко мы ихъ ни продолжали. — Для доказательства этого продолжимъ прямыя EC и FD по другую сторону прямой AB до точекъ G и I. Примемъ прямую CD за ось вращенія и повернемъ верхнюю часть полученной фигуры, т. е. фигуру AECDFB вокругъ оси до совмѣщенія плоскости этой послѣдней фигуры съ плоскостью фигуры ACGIDB. Такъ какъ EC по условію перпендикулярна къ AB, то ∠ DCE, какъ прямой, совмѣстится при этомъ съ угломъ DCG, ибо и этотъ послѣдній уголъ тоже уголъ прямой; по той же причинѣ прямая DF совмѣстится съ прямою DI. Такимъ образомъ получимъ, что если бы CE и DF по продолженіи пересѣклись, то и прямыя CG и DI тоже пересѣклись бы, а въ такомъ случаѣ прямыя EG и FI имѣли бы двѣ общія точки, т. е. должны были бы (теорема 1) совмѣститься; чего быть не можетъ по самому ихъ положенію на плоскости. Стало-быть, если изъ двухъ точекъ нѣкоторой прямой, взятой въ данной плоскости, провести въ этой плоскости двѣ прямыя, перпендикулярныя къ этой прямой, то эти двѣ прямыя не могутъ пересѣчься, какъ бы далеко ихъ ни продолжали. Что и требовалось доказать.



Черт. 27.

Опредѣленія. Двѣ прямыя линіи, находящіяся въ одной и той же плоскости и не пересѣкающіяся, какъ бы далеко ихъ ни продолжали, называются *параллельными*.

Если въ данной плоскости (черт. 28) даны какія-нибудь двѣ прямыя и если онѣ пересѣчены какою-нибудь третьею, то эта послѣдняя называется *сѣкущею*. Сѣкущая образуетъ съ двумя прямыми, лежащими въ одной съ нею плоскости, восемь угловъ. На чертежѣ эти углы по порядку обозначены малыми буквами латинскаго алфавита: a, b, c, e, f, g, i, k. (При этомъ ни одинъ изъ угловъ не обозначенъ



Черт. 28.

буквою d, такъ какъ этою буквою обыкновенно принято обозначать только прямой уголъ). Угламъ, лежащимъ по одну сторону данныхъ прямыхъ и по одну сторону сѣкущей, присвоено названіе *соотвѣтственныхъ*; такъ, углы b и g суть углы соотвѣтственные, и соотвѣтственными являются также углы e и k, a и f, c и i. Угламъ, лежащимъ по одну и ту же сторону сѣкущей, но по разныя стороны данныхъ прямыхъ, присвоено названіе *односторонних* угловъ, причемъ одни изъ нихъ называются *внутренними односторонними*, а другіе—*внѣшними односторонними*. Такъ, углы, b и k суть внѣшніе односторонніе, e и g—внутренніе односторонніе, a и i—внѣшніе односторонніе, c и f внутренніе односторонніе. Угламъ, лежащимъ по различныя стороны данныхъ прямыхъ и по различныя стороны сѣкущей присвоено названіе *накрестъ-лежащихъ*; при томъ одни изъ нихъ называются *внутренними накрестъ-лежащими*, а другіе — *внѣшними накрестъ-лежащими*. Такъ, углы b и i суть углы внѣшніе накрестъ-лежащіе, e и f внутренніе накрестъ-лежащіе, a и k — внѣшніе накрестъ-лежащіе, c и g—внутренніе накрестъ-лежащіе. Эти названія примѣняются какъ въ случаяхъ, когда данныя прямыя не параллельны другъ другу, такъ равно и въ случаяхъ, когда онѣ другъ другу параллельны.

Двѣ прямыя, лежащія въ одной плоскости и пересѣченныя третьею, условимся для краткости называть *системою трехъ прямыхъ*.

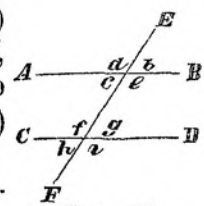
Теорема 15. Если въ системѣ трехъ прямыхъ два соотвѣтственныхъ угла равны между собою, то и прочіе соотвѣтственные углы этой системы тоже равны между собою.

Доказательство. Пусть въ системѣ (черт. 29) $\angle b = \angle g$; требуется доказать, что $\angle a = \angle f$, $\angle c = \angle h$, $\angle e = \angle i$.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что (теорема 8 и аксіома 6)

$$\angle a + \angle b = \angle g + \angle f;$$

отнявъ отъ обѣихъ частей равенства поровну, получимъ (аксіома 8-ая о величинахъ), что

$$\angle a = \angle f.$$



Черт. 29.

Точно такъ же докажемъ, что остальные соотвѣтственные углы равны между собою. Что и требовалось доказать.

Теорема 16. Если въ системѣ трехъ прямыхъ два соотвѣтственныхъ угла равны между собою, то и внутренніе накрестъ-лежащіе углы этой системы, а также внѣшніе накрестъ-лежащіе углы ея равны между собою.

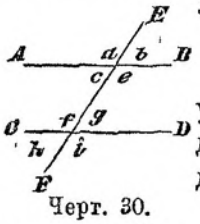
Доказательство. Пусть (черт. 30) $\angle b = \angle g$; требуется

доказать, что $\angle c = \angle g$, $\angle e = \angle f$, $\angle a = \angle i$, $\angle b = \angle h$. Для доказательства этого замѣтимъ, что (теорема 13-ая)

$$\angle b = \angle c;$$ но по условію $\angle b = \angle g$;

стало-быть (аксіома 6-ая) $\angle c = \angle g$; т. е. два внутреннихъ накрестъ-лежащихъ угла равны между собою.

Зная, что $\angle c = \angle g$ и что $\angle c + \angle e = \angle f + \angle g$, убѣдимся, что $\angle f = \angle e$; т. е. другіе два внутренніе накрестъ-лежащіе угла равны между собою.



Черт. 30.

Зная далѣе, что

$$\angle a = \angle e, \quad \angle e = \angle f, \quad \angle f = \angle i,$$

убѣдимся, что (аксіома 5-ая) $\angle a = \angle i$, т. е. что два внѣшнихъ накрестъ-лежащихъ угла равны между собою.

Зная, наконецъ, что $\angle h = \angle g$, $\angle g = \angle c$, $\angle c = \angle b$, найдемъ, что $\angle b = \angle h$, т. е. что другіе два внѣшніе накрестъ-лежащіе угла равны между собою. Стало-быть, если въ данной системѣ трехъ прямыхъ два соотвѣтственныхъ угла равны между собою, то и внутренніе накрестъ-лежащіе, а также внѣшніе накрестъ-лежащіе углы, тоже равны между собою. Что и требовалось доказать.

Теорема 17. Если въ данной системѣ трехъ прямыхъ два соотвѣтственныхъ угла равны между собою, то сумма каждыхъ двухъ внутреннихъ односторонніхъ, а также сумма каждыхъ двухъ внѣшнихъ односторонніхъ, равна $2d$.

Доказательство. Пусть въ данной системѣ (черт. 30) $\angle b = \angle g$; требуется доказать, что

$$\angle e + \angle g = 2d, \quad \angle c + \angle f = 2d$$
$$\angle b + \angle i = 2d \text{ и } \angle a + \angle h = 2d.$$

Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что

$$\angle e + \angle b = 2d;$$

вставивъ (аксіома 5-ая) въ это равенство вмѣсто угла b равный ему по условію $\angle g$, получимъ

I) $\angle e + \angle g = 2d;$

вставивъ въ то же равенство вмѣсто угла e равный ему $\angle f$, а вмѣсто угла g равный ему $\angle c$, получимъ $\angle f + \angle c = 2d$ или

II) $\angle c + \angle f = 2d;$

вставивъ далѣе въ то же равенство вмѣсто угла e равный ему $\angle i$, а вмѣсто угла g равный ему $\angle b$, получимъ $\angle i + \angle b = 2d$ или

III) $\angle b + \angle i = 2d;$

вставивъ, наконецъ, въ то же равенство вмѣсто угла e равный ему $\angle a$, а вмѣсто угла g равный ему $\angle h$, получимъ

IV) $\angle a + \angle h = 2d.$

Такимъ образомъ мы получили, что если два соотвѣтственныхъ угла данной системы трехъ прямыхъ равны между собою, то сумма любыхъ двухъ внутреннихъ или любыхъ двухъ внѣшнихъ односторонніхъ угловъ равна $2d$. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Теоремы 15, 16 и 17 убѣждаютъ насъ въ томъ, что равенство, въ системѣ трехъ прямыхъ линій, двухъ соотвѣтственныхъ угловъ другъ другу влечетъ за собою слѣдующій рядъ равенствъ: равенство остальныхъ соотвѣтственныхъ угловъ другъ другу, равенство накрестъ-лежащихъ, равенство суммы любыхъ двухъ внутреннихъ односторонніхъ и суммы любыхъ двухъ внѣшнихъ односторонніхъ угловъ двумъ прямымъ. Ниже приведены въ систему теоремы, обратныя этимъ теоремамъ:

Теорема 18. Если въ данной системѣ трехъ прямыхъ линій какіе-нибудь внутренніе накрестъ-лежащіе углы равны между собою, то: 1) *соотвѣтственные углы тоже равны между собою;* 2) остальные два внутренніе накрестъ-лежащіе угла равны между собою; 3) внѣшніе накрестъ-лежащіе равны между собою, и 4) сумма односторонніхъ угловъ (внутреннихъ или внѣшнихъ) равна $2d$.

Теорема 19. Если въ данной системѣ трехъ прямыхъ линій какіе-нибудь два внѣшніе накрестъ лежащіе углы равны между собою, то: 1) остальные два внѣшнихъ накрестъ-лежащихъ тоже равны между собою; 2) внутренніе накрестъ-лежащіе равны между собою; 3) соотвѣтственные углы равны между собою, и 4) сумма односторонніхъ угловъ (внутревнихъ или внѣшнихъ) равны $2d$.

Теорема 20. Если въ данной системѣ трехъ прямыхъ линій сумма какихъ-либо двухъ внутреннихъ односторонніхъ угловъ равна $2d$, то: 1) сумма остальныхъ двухъ внутреннихъ односторонніхъ равна двумъ прямымъ; 2) сумма внѣшнихъ односторонніхъ равна двумъ прямымъ; 3) соотвѣтственные углы равны между собою, и 4) накрестъ-лежащіе углы равны между собою.

Теорема 21. Если въ данной системѣ трехъ прямыхъ линій сумма какихъ-либо двухъ внѣшнихъ односторонніхъ угловъ равна $2d$, то: 1) сумма остальныхъ двухъ внѣшнихъ односторонніхъ равна $2d$; 2) сумма внутреннихъ односторонніхъ равна $2d$; 3) соотвѣтственные углы равны между собою, и 4) накрестъ-лежащіе углы равны между собою.

Доказательство этихъ четырехъ теоремъ предоставляется учащемуся, такъ какъ оно можетъ быть поведено въ томъ же родѣ, какъ и доказательство теоремъ 15, 16 и 17.

Опредѣленіе. Если какое-либо предложеніе отличается отъ другого только тѣмъ, что и условіе, и заключеніе ихъ

тѣ же, но въ одномъ предложеніи они оба снабжены отрицаніемъ, то каждое изъ нихъ называется по отношенію къ другому *противоположнымъ*. Если противоположное данной теоремѣ предложеніе справедливо, то оно называется *противоположною теоремою*. Слѣдующія теоремы противоположны доказаннымъ выше:

Теорема 22, (противоположная теоремамъ 15, 16 и 17). Если два соотвѣтственныхъ угла данной системы трехъ прямыхъ не равны между собою, то: 1) остальные соотвѣтственные углы тоже не равны между собою; 2) внутренніе (а также внѣшніе) накрестъ-лежащіе углы не равны между собою; 3) сумма внутреннихъ (а также внѣшнихъ) односторонихъ не равна двумъ прямымъ.

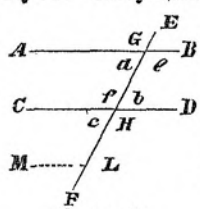
Теорема 23, (противоположная теоремѣ 18 и 19). Если два накрестъ-лежащіе угла не равны между собою, то: 1) остальные накрестъ-лежащіе углы не равны между собою; 2) соотвѣтственные углы не равны между собою; 3) сумма внутреннихъ (а также внѣшнихъ) односторонихъ угловъ не равны между собою.

Теорема 24, (противоположная теоремѣ 20 и 21). Если сумма двухъ внутреннихъ (или внѣшнихъ) односторонихъ угловъ не равна двумъ прямымъ, то: 1) сумма остальныхъ внутреннихъ (или внѣшнихъ) односторонихъ не равна двумъ прямымъ; 2) соотвѣтственные углы не равны между собою; 3) накрестъ-лежащіе углы не равны между собою.

Доказательство этихъ трехъ теоремъ предоставляется учащемуся, такъ какъ оно очень просто, если его повести способомъ отъ противоположнаго.

Теорема 25. Если въ системѣ трехъ прямыхъ линій внутренніе накрестъ-лежащіе углы равны другъ другу, то прямыя, образующія съ сѣкущею эти углы, параллельны.

Доказательство. Пусть (черт. 31) даны прямыя AB и CD, пусть сѣкущая EF пересѣкаетъ эти двѣ прямыя въ точкахъ G и H, пусть она образуетъ съ ними внутренніе накрестъ-лежащіе углы a и b, и пусть наконецъ $\angle a = \angle b$; требуется доказать, что прямыя AB и CD параллельны.—Для доказательства этого обернемъ фигуру BGHD въ плоскости чертежа вокругъ точки H, такъ чтобы линія HD совмѣстилась съ линіей HC. Такъ какъ $\angle b = \angle c$, какъ вертикальные, то HG совмѣстится съ HF, причемъ точка G займетъ положеніе нѣкоторой точки L, а прямая GB—положеніе прямой LM. Послѣ этого наложимъ фигуру CHLM, т. е. фигуру BGHD на фигуру AGHC такъ, чтобы прямая HL совмѣстилась съ прямой GH. Такъ какъ по условію $\angle a = \angle b$, то (теорема 18)



Черт. 31.

$\angle a = \angle c$, и потому прямая CH фигуры CHLM совпадетъ съ прямою AG. Но, если $\angle a = \angle b$, то $\angle e = \angle f$ (теорема 18), т. е. $\angle MLH = \angle f$, а потому сторона LM фигуры CHLM совпадетъ со стороною HC фигуры AGHC, т. е. фигура BGHD можетъ быть наложена на фигуру AGHC такъ, чтобы онѣ совершенно совпали. Если бы мы поэтому предположили, что прямыя GB и KD по продолженіи пересѣкутся, то и прямыя GA и HC тоже пересѣклись бы, и такимъ образомъ прямыя AB и CD, занимающія различныя положенія въ плоскости, должны были бы имѣть двѣ общія точки, т. е. должны были бы (теорема 1) совмѣститься; чего быть не можетъ; стало-быть, эти прямыя должны быть параллельны другъ другу. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1-ое. Если въ системѣ трехъ прямыхъ линій соотвѣтственные углы равны между собою, то двѣ прямыя, образующія съ третьею эти углы, параллельны.—Дѣйствительно: если соотвѣтственные углы данной системы равны между собою, то (теорема 16) внутреннія накрестъ-лежащіе тоже равны; а въ такомъ случаѣ прямыя параллельны.

Слѣдствіе 2-ое. Если въ системѣ трехъ прямыхъ линій внѣшніе накрестъ-лежащіе углы равны между собою, то двѣ прямыя, образующія съ третьею эти углы, параллельны. — Доказательство ведется такъ же, какъ для слѣдствія 1-го.

Слѣдствіе 3-е. Если въ системѣ трехъ прямыхъ линій сумма внутреннихъ (или внѣшнихъ) односторонникъ равны $2d$, то двѣ прямыя, образующія съ третьею эти углы, параллельны.—Доказательство ведется такъ же, какъ для слѣдствія 1-го.

Замѣчаніе. Теоремы, обратныя теоремѣ 25 и тремъ слѣдствіямъ изъ нея, не могутъ быть вполнѣ точно доказаны безъ нѣкотораго допущенія относительно системы трехъ прямыхъ линій.

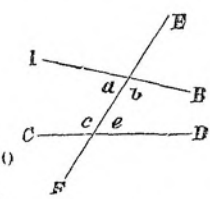
Теорема 26. *Если въ системѣ трехъ прямыхъ сумма какихъ-нибудь внутреннихъ односторонникъ угловъ меньше $2d$, то сумма остальныхъ двухъ внутреннихъ односторонникъ угловъ больше $2d$.*

Доказательство. Пусть (черт. 32)

$$\angle b + \angle e < 2d;$$

требуется доказать, что

$$\angle a + c > 2d.$$



Черт. 32.

Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что

$$\angle b + \angle e + \angle a + \angle c = 4d.$$

Отнявъ отъ обѣихъ частей этого равенства части даннаго неравенства

$$\angle b + \angle e < 2d,$$

получимъ, на основаніи аксіомы 10-ой, что

$$\angle a + \angle c > 2d.$$

Что и требовалось доказазать.

Допущеніе относительно системы трехъ прямыхъ линій. Относительно системы трехъ прямыхъ линій дѣлается слѣдующее допущеніе: Если двѣ прямыя пересѣкаются третьею и при этомъ сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ не равна $2d$, то эти двѣ прямыя линіи по достаточномъ продолженіи должны пересѣчься въ сторону меньшей суммы.

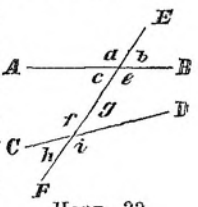
Замѣчаніе 1-ое. Это допущеніе извѣстно въ наукѣ подъ именемъ *Евклидова постулата*, или одиннадцатой аксіомы Евклида, по имени славнаго греческаго геометра Евклида, который жилъ въ III в. до Р. Хр. и первый далъ образцовое, классическое изложеніе ученій геометріи въ своихъ знаменитыхъ „Началахъ“. Евклидовъ постулатъ представляетъ собою предложеніе противоположное предложенію: если въ системѣ трехъ прямыхъ линій сумма двухъ внутреннихъ одностороннихъ угловъ равна $2d$, то двѣ линіи, пересѣкаемыя третьей прямою, параллельны (слѣдствіе 3-е изъ теоремы 25).

Постулатъ Евклида не можетъ быть доказанъ. Несмотря на всѣ усилія геометровъ, до сихъ поръ не могла быть доказана ни одна изъ теоремъ, обратныхъ теоремѣ 25 и слѣдствіямъ ея. Онѣ могутъ быть доказаны, если принять одно изъ нижеизложенныхъ предложеній за аксіому. Но это было бы только ни къ чему не ведущимъ отступленіемъ отъ классическаго пріема, употребленнаго Евклидомъ; ибо отъ этого не уменьшилось бы въ Геометріи число аксіомъ и допущеній.

Замѣчаніе 2-ое. За постулатъ можно было бы принять также одно изъ слѣдующихъ равносильныхъ ему предложеній: 1) если при пересѣченіи двухъ прямыхъ третьею сумма какихъ-нибудь внѣшнихъ односторонихъ угловъ не равна двумъ прямымъ, то эти двѣ прямыя по достаточномъ продолженіи пересѣкутся въ сторону бо́льшей ихъ суммы; 2) если при пересѣченіи двухъ прямыхъ третьею какіе-нибудь соотвѣтственные (или накрестъ-лежащіе) углы не равны между собою, то эти двѣ прямыя пересѣкутся по ту сторону сѣкущей, гдѣ внутренніе односторонніе углы, будучи сложены, даютъ меньшую сумму. Евклидову постулату выше отдано преимущество какъ потому, что онъ принятъ въ большинствѣ сочиненій по предмету геометріи, появившихся послѣ Евклида, такъ и потому, что сумма внутреннихъ односторонихъ угловъ наилучшимъ образомъ характеризуетъ пересѣкаемость или непересѣкаемость данныхъ двухъ прямыхъ.

Теорема 27. Если въ системѣ трехъ прямыхъ линій какіе-нибудь соотвѣтственные углы не равны между собою, то двѣ прямыя, образующія съ третьею эти соотвѣтственные углы, должны по достаточномъ продолженіи пересѣчься по ту сторону сѣкущей, гдѣ сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ меньше, чѣмъ $2d$.

Доказательство. Пусть (черт. 33) $\angle a$ не равенъ $\angle f$; требуется доказать, что данныя прямыя AB и CD пересѣкутся въ сторону, гдѣ сумма внутреннихъ односторонних угловъ меньше, чѣмъ $2d$.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что (теорема 22) если $\angle a < \angle f$, то сумма $\angle c + \angle f$ не равна $2d$; а въ такомъ случаѣ, на основаніи Евклидова постулата, данныя прямыя AB и CD пересѣкутся въ сторону меньшей суммы. Что и требовалось доказать.



Черт. 33.

Теорема 28. Если въ системѣ трехъ прямыхъ линій какіе-либо два накрестъ-лежащихъ угла не равны между собою, то прямыя, образующія съ сѣкущею эти углы, пересѣкутся по ту сторону сѣкущей, гдѣ сумма внутреннихъ односторонних угловъ меньше, чѣмъ $2d$.

Теорема 29. Если въ системѣ трехъ прямыхъ линій сумма какихъ-либо двухъ внѣшнихъ односторонних угловъ не равна $2d$, то прямыя, образующія съ сѣкущею эти углы, пересѣкутся по ту сторону сѣкущей, гдѣ сумма внутреннихъ односторонних угловъ меньше, чѣмъ $2d$.

Доказательство этихъ двухъ теоремъ предоставляется учащемуся, такъ какъ ведется въ томъ же направленіи, какъ и доказательство теоремы 27.

Теорема 30 (обратная теоремѣ 25 и слѣдствіямъ изъ нея). Если двѣ прямыя параллельны, то: 1) соотвѣтственные углы равны между собою; 2) накрестъ-лежащіе углы равны между собою; 3) сумма внутреннихъ (внѣшнихъ) односторонних угловъ равна $2d$.

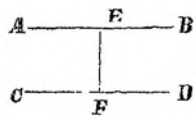
Доказательство ведется отъ противоположнаго и предоставляется учащемуся.

Замѣчаніе. Благодаря Евклидову постулату каждое изъ равенствъ, *достаточныхъ* для параллельности двухъ прямыхъ, для этой параллельности также и *необходимо*. Напр., для того чтобы данныя двѣ прямыя были параллельны, не только достаточно, но также и необходимо, чтобы сумма двухъ внутреннихъ односторонних угловъ системы равнялось $2d$. Этого достаточно на основаніи слѣдствія 3-го теоремы 25; необходимо же это на основаніи

Евклидова постулата. То же справедливо относительно каждаго изъ остальныхъ равенствъ того же рода.

Теорема 31. Если изъ двухъ параллельныхъ линій одна перпендикулярна къ нѣкоторой ихъ сѣкущей, то и другая тоже перпендикулярна къ этой сѣкущей.

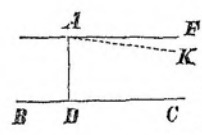
Доказательство. Пусть (черт. 34) даны двѣ линіи AB и CD и пусть AB перпендикулярна къ EF; требуется доказать, что CD также перпендикулярна къ EF.—Для доказательства этого предположимъ, что CD къ ней не перпендикулярна; тогда сумма внутреннихъ односторонниихъ угловъ, лежащихъ при вершинахъ E и F, была бы не равна $2d$, и прямыя AB и CD, на основаніи Евклидова постулата, должны были бы пересѣчься, что̀ противорѣчитъ условію; слѣдовательно CD должна быть тоже перпендикулярна къ EF. Что и требовалось доказать.



Черт. 34.

Теорема 32. Изъ точки, взятой внѣ прямой, къ этой прямой можно провести только одну параллельную.

Доказательство. Пусть изъ точки A (черт. 35) къ прямой BC проведена линія AF, параллельная ей; требуется доказать, что изъ той же точки нельзя къ той же прямой провести еще одну параллельную.—Для доказательства этого предположимъ, что изъ этой точки можно провести въ той же плоскости прямую AK, тоже параллельную къ BC. Проведемъ изъ точки A перпендикуляръ AD къ линіи AF. Прямая AD должна быть также перпендикулярна къ BC (теорема 31), равнымъ образомъ прямая AD (теорема 31) должна быть перпендикулярна также и къ прямой AK. А въ такомъ случаѣ изъ точки A прямой AD къ этой прямой въ одной плоскости проведены два перпендикуляра. Чего быть не можетъ (теорема 7). Стало-быть изъ точки, взятой внѣ прямой, къ этой прямой можетъ быть проведена только одна линія ей параллельная. Что и требовалось доказать.

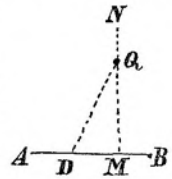


Черт. 35.

Теорема 33. Черезъ точку, взятую внѣ прямой въ одной съ нею плоскости, можно провести къ этой прямой перпендикуляръ, и при томъ только одинъ перпендикуляръ.

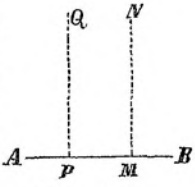
Доказательство. Пусть въ плоскости чертежей 36 и 37 дана прямая AB и точка Q внѣ ея; требуется доказать, что изъ этой точки къ данной прямой можно провести перпендикуляръ и притомъ только одинъ перпендикуляръ.—Для доказательства этого проведемъ изъ какой-либо точки M той же прямой въ той

же плоскости перпендикуляръ; при этомъ можетъ представиться два случая: 1) перпендикуляръ пройдетъ чрезъ точку Q, и 2) перпендикуляръ черезъ точку Q не пройдетъ.



Черт. 36.

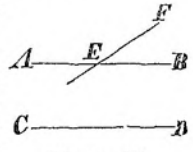
Въ первомъ случаѣ (черт. 36) будетъ доказано, что чрезъ точку Q можно провести перпендикуляръ къ прямой AB, ибо тогда прямая QM и будетъ такимъ перпендикуляромъ. Во второмъ же случаѣ (черт. 36 а) проведемъ черезъ точку Q прямую, параллельную прямой MN; прямая QP тоже будетъ перпендикулярна къ AB, а потому QP будетъ перпендикуляромъ, проведеннымъ чрезъ точку Q къ прямой AB. Стало-быть, *чрезъ точку, взятую внѣ прямой, къ этой прямой можетъ быть проведенъ перпендикуляръ*. Теперь остается доказать, что черезъ точку, взятую внѣ прямой, къ этой прямой можно провести только одинъ перпендикуляръ. Для доказательства этого обратимся къ обоимъ случаямъ: въ первомъ случаѣ предположимъ, что можно провести еще перпендикуляръ QD; тогда получимъ два перпендикуляра DQ и MQ, проведенные въ одной плоскости къ одной и той же прямой AB, а въ такомъ случаѣ DQ ∥ MQ, чего быть не можетъ, такъ какъ DQ и MQ пересѣкаются въ точкѣ Q. Такимъ образомъ для этого случая доказано, что черезъ точку, взятую внѣ прямой, къ этой прямой можетъ быть проведенъ только одинъ перпендикуляръ. Для второго случая, при которомъ MN не проходитъ чрезъ точку Q, мы провели изъ точки Q прямую QP, параллельную прямой NM. Слѣдовательно (теорема 32) и въ этомъ случаѣ чрезъ точку Q къ прямой AB можно провести только одинъ перпендикуляръ. Стало-быть, черезъ точку, взятую внѣ прямой, къ этой прямой можно провести перпендикуляръ, и притомъ только одинъ. Что и требовалось доказать.



Черт. 36а.

Опредѣленія. Когда перпендикуляръ къ данной прямой проведенъ изъ точки, взятой на ней, то говорятъ, что онъ *возставленъ* изъ данной точки; въ противномъ случаѣ, говорятъ, что онъ *опущенъ* изъ точки, взятой внѣ прямой.

Теорема 34. Если изъ двухъ параллельныхъ прямыхъ одна пересѣкается нѣкоторою прямою, то и другая съ нею по достаточномъ ихъ продолженіи пересѣчется.



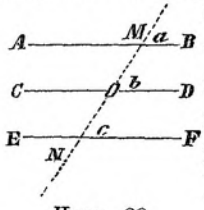
Черт. 37.

Доказательство. Пусть (черт. 37) AB ∥ CD, а прямая EF пересѣкаетъ прямую AB въ точкѣ E; требуется доказать, что EF и CD по достаточномъ продолженіи пересѣкутся. — Для доказательства этого предположимъ, что онѣ не пересѣкутся. Въ такомъ случаѣ

прямая EF параллельна прямой CD, и изъ точки E, взятой внѣ прямой AB, къ этой прямой были бы проведены двѣ параллельныя прямыя. Чего быть не можетъ (теорема 32). Слѣдовательно не можетъ быть также и того, чтобы EF не пересѣкла прямой CD. Стало-быть, если изъ двухъ параллельныхъ прямыхъ одна пересѣкается нѣкоторою прямою, то и другая съ нею по достаточномъ продолженіи пересѣчется. Что и требовалось доказать.

Теорема 35. Если каждая изъ двухъ прямыхъ параллельна третьей, то онѣ парраллельны другъ другу.

Доказательство. Пусть (черт. 38) прямыя AB и CD порознь параллельны прямой EF; требуется доказать, что AB параллельна CD.—Для доказательства этого проведемъ сѣкущую черезъ какія-нибудь точки M и N прямыхъ AB и EF. Эта сѣкущая должна пересѣчь линію CD, потому что CD по условію параллельна EF, а прямая MN пересѣкаетъ прямую EF (теорема 34). При этомъ образуются углы a, b и c, изъ которыхъ $\angle a = \angle c$ и $\angle b = \angle c$ (теорема 30); стало-быть (аксіома 6-ая), $\angle a = \angle b$, т. е. соотвѣтственные углы системы трехъ прямыхъ AB, CD и MN равны между собою, а въ такомъ случаѣ AB и CD параллельны (слѣдствіе 1-ое теоремы 25). Что и требовалось доказать.



Черт. 38.

Слѣдствіе. Если одна прямая параллельна другой, а эта послѣдняя параллельна третьей, то первая параллельна третьей.—Дѣйствительно: если вторая параллельна третьей, то третья параллельна второй; но первая тоже параллельна второй; стало-быть, первая и третья, порознь взятыя, параллельны второй, а потому онѣ параллельны другъ другу.

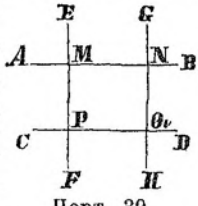
Теорема 36. Если двѣ прямыя, параллельныя другъ другу, пересѣкаются нѣкоторою прямою, а четвертая параллельна сѣкущей, то и эта послѣдняя пересѣкаетъ данныя прямыя.

Доказательство. Пусть двѣ прямыя параллельны: пусть третья прямая ихъ пересѣкаетъ и пусть проведена четвертая прямая, параллельная третьей; требуется доказать, что и она пересѣкаетъ данныя двѣ параллельныя линіи.—Для доказательства этого предположимъ, что она не пересѣкаетъ; тогда она должна быть имъ параллельна, а третью прямую должна пересѣчь (теорема 34), что противорѣчитъ условію. Слѣдовательно невозможно также, чтобы она не пересѣкала данныхъ двухъ параллельныхъ линій, а потому она ихъ пересѣкаетъ. Что и требовалось доказать.

Теорема 37. Если изъ двухъ параллельныхъ линій одна перпендикулярна къ одной изъ числа другихъ двухъ параллель-

ныхъ линій, то всѣ углы, при этомъ образованные, (числомъ 16) суть углы прямые.

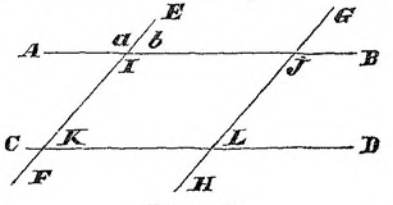
Доказательство: Пусть (черт. 39) AB ‖ CD, EF ‖ GH и пусть EF ⊥ AB; требуется доказать, что всѣ углы, образованные этими четырьмя прямыми въ точкахъ пересѣченія M, N, P и Q, суть прямые. — Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что EF перпендикулярна къ CD (теорема 31), что AB перпендикулярна къ EF, слѣдовательно также перпендикулярна къ GH (теорема 31), и что GH перпендикулярна къ AB, слѣдовательно также перпендикулярна къ CD (теорема 31). А потому всѣ углы, образованные при точкахъ M, N, P и Q, (числомъ 16) суть прямые. Что̀ и требовалось доказать.



Черт. 39.

Теорема 38. Если двѣ параллельныя прямыя пересѣкаются двумя другими, не образуя при пересѣченіи прямыхъ угловъ, то всѣ острые углы, при этомъ образованные, равны между собою, всѣ тупые—тоже равны между собою, и любой острый съ любымъ тупымъ взаимно дополняютъ другъ друга до $2d$.

Доказательство. Пусть (черт. 40) прямая AB ‖ CD, пусть онѣ пересѣчены прямыми EF и GH, пусть также EF ‖ GH и, наконецъ, пусть углы, при этомъ образованные, не суть прямые; требуется доказать, что всѣ острые углы равны между собою, всѣ тупые тоже между собою равны и что сумма любого остраго съ любымъ тупымъ равна $2d$.—Для доказательства этого обозначимъ ∠ AIE буквою a, а смежный съ нимъ уголъ EIB—буквою b; предположимъ, что $\angle b$ острый, и сравнимъ всѣ острые углы съ угломъ b, а всѣ тупые—съ угломъ a. Тогда получимъ, что



Черт. 40.

$\angle$ AIF $= \angle b$, (теорема 13);

$\left.\begin{array}{l}\angle \text{CKF} = \angle b,\\ \angle \text{EKD} = \angle b,\\ \angle \text{GJB} = \angle b,\\ \angle \text{AJH} = \angle b,\end{array}\right\}$ (теорема 30);

$\angle$ GLD $= \angle b$, потому что $\angle$ GLD $= \angle$ AJH какъ внутренніе накрестъ-лежащіе, а $\angle$ AJH $= \angle b$ по предыдущему; $\angle$ CLH $= \angle b$, потому что $\angle$ CLH $= \angle$ GLD, какъ вертикальные, а $\angle$ GLD $= \angle b$ по предыдущему. Такимъ образомъ мы получили, что всѣ острые углы (числомъ 8), которые образованы въ данномъ случаѣ, равны между собою. Точно такимъ же образомъ убѣдимся, что всѣ тупые углы (числомъ 8) тоже равны между собою,

причемъ каждый острый уголъ равенъ углу b, а каждый тупой—углу a. Но $\angle a + \angle b = 2d$, потому что $\angle a$ и $\angle b$ суть углы смежные. Стало-быть, всѣ острые углы равны между собою, всѣ тупые тоже между собою равны, а сумма любого остраго съ любымъ тупымъ равна $2d$. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Если стороны одного угла параллельны сторонамъ другого, находящагося въ той же плоскости, то они либо оба прямые, либо оба острые, либо оба тупые, либо одинъ изъ нихъ острый, а другой тупой.—Дѣйствительно: если бы мы предположили, что одинъ изъ нихъ острый (тупой), а другой—прямой, то мы получили бы, что либо острый (тупой) уголъ равенъ прямому, либо же сумма остраго (или тупого) угла съ прямымъ равна двумъ прямымъ (теорема 30). Чего быть не можетъ

Замѣчаніе. Если двѣ параллельныя другъ другу прямыя перпендикулярны къ двумъ другимъ параллельнымъ линіямъ, то любые два угла, при этомъ образованные, равны между собою и, кромѣ того, сумма любыхъ двухъ угловъ, при этомъ образованныхъ, равна $2d$; ибо въ этомъ случаѣ всѣ 16 угловъ суть прямые.

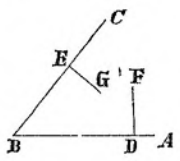
Теорема 39. Если въ одной плоскости взяты два непрямыхъ угла и если стороны одного изъ нихъ параллельны сторонамъ другого, то либо эти углы равны между собою, либо же взаимно дополняютъ другъ друга до $2d$.

Доказательство. Пусть даны углы ABC и DEF, гдѣ $\angle$ ABC острый, а $\angle$ DEF—либо острый, либо тупой; пусть AB $\parallel$ DE, а BC $\parallel$ EF; требуется доказать, что либо $\angle$ABC равенъ $\angle$ DEF, либо $\angle$ ABC $+ \angle$ DEF $= 2d$. — Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что при достаточномъ и надлежащемъ продолженіи сторонъ данныхъ угловъ мы получимъ двѣ параллельныя прямыя, перссѣченныя другими двумя параллельными прямыми. При этомъ, по предыдущей теоремѣ, всѣ образованные этими прямыми острые углы равны между собою, всѣ тупые тоже между собою равны, а сумма любого остраго съ любымъ тупымъ равна $2d$. Углы ABC и DEF принадлежатъ къ ихъ числу. Стало-быть, если мы возьмемъ острый уголъ DEF, то $\angle$ DEF равенъ $\angle$ ABC, а если $\angle$ DEF тупой, то $\angle$ ABC $+ \angle$ DEF $= 2d$, (теорема 38). Что и требовалось доказать.

Теорема 40. Если изъ двухъ точекъ, взятыхъ на сторонахъ даннаго остраго угла, провести къ этимъ сторонамъ въ той же плоскости перпендикуляры, то эти перпендикуляры по достаточномъ продолженіи пересѣкутся.

Доказательство. Пусть (черт. 41) данъ острый уголъ ABC, пусть прямая DF $\perp$ AB, а прямая EG $\perp$ BC; требуется дока-

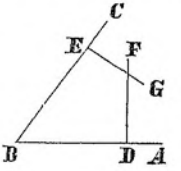
зать, что эти перпендикуляры пересѣкутся. — Для доказательства этого предположимъ, что они не пересѣкутся; въ такомъ случаѣ эти прямыя DF и EG либо совпадаютъ, либо же параллельны. Но если бы онѣ совпадали, тогда чрезъ точку B къ одной и той же прямой были бы проведены два перпендикуляра, чего быть не можетъ; если бы онѣ были параллельны, то (теорема 31) прямая EG была бы перпендикулярна къ AB, т. е. AB—перпендикулярна къ EG, и такимъ образомъ чрезъ точку B къ прямой EG были бы преведены два перпендикуляра BE и BA, чего быть не можетъ (теорема 33). Такимъ образомъ прямыя DF и EG, находясь въ одной плоскости, не совпадаютъ и не параллельны другъ другу, т. е. должны пересѣчься. Что и требовалось доказать.



Черт. 41.

Теорема 41. Если изъ двухъ точекъ, взятыхъ на сторонахъ даннаго остраго угла, провести къ этимъ сторонамъ въ той же плоскости перпендикуляры, то эти перпендикуляры пересѣкутся подъ острымъ или подъ тупымъ угломъ.

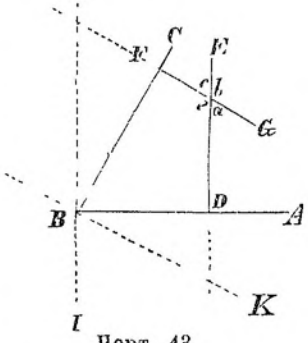
Доказательство. Пусть (черт. 42) $\angle$ ABC острый, DF $\perp$ AB и EG $\perp$ BC и пусть точкою ихъ пересѣченія будетъ точка M; требуется доказать, что ни одинъ изъ угловъ, образованныхъ при вершинѣ M, не есть прямой.—Для доказательства этого предположимъ, что $\angle$ GMD прямой; тогда $\angle$ EMD тоже прямой, и EG $\parallel$ AB, а FD $\parallel$ BC (теорема 31). А въ такомъ случаѣ получилось бы, что при пересѣченіи двухъ параллельныхъ линій AB и EG двумя параллельными BC и DF образуются и прямые, и острые углы. Чего быть не можетъ (теорема 37). Стало-быть, и $\angle$ GMD не можетъ быть прямымъ угломъ. Что и требовалось доказать.



Черт. 42.

Теорема 42. Если къ сторонамъ даннаго остраго угла провести въ той же плоскости перпендикуляры, то изъ четырехъ угловъ, образованныхъ при точкѣ пересѣченія перпендикуляровъ, два равны данному углу, а изъ остальныхъ двухъ каждый дополняетъ его до $2d$.

Доказательство. Пусть (черт. 43) изъ точекъ D и F сторонъ остраго угла ABC проведены перпендикуляры къ AB и BC такъ, что DE $\perp$ AB и FG $\perp$ BC; требуется доказать, что изъ четырехъ угловъ a, b, c и e два равны



Черт. 43.

углу ABC, а каждый изъ остальныхъ двухъ дополняетъ его до $2d$.—Для доказательства этого изъ точки B проведемъ прямую BK параллельно къ FG, и прямую BI параллельно къ DE. По теоремѣ 38,

$$\angle a = \angle \text{IBK},$$

но

$$\angle \text{IBK} = d - \angle \text{ABK}, \text{ а } \angle \text{ABC} = d - \angle \text{ABK},$$

слѣдовательно (аксіома 6)

$$\angle \text{IBK} = \angle \text{ABC},$$

а потому (аксіома 5)

$$\angle a = \angle \text{ABC},$$

а въ такомъ случаѣ также и

$$\angle e = \angle \text{ABC};$$

такимъ образомъ доказано, что два угла при точкѣ пересѣченія перпендикуляровъ порознь равны углу ABC. Что же касается угловъ b и e, то

$$\angle b + \angle a = 2d, \quad \text{и} \quad \angle e + \angle a = 2d.$$

слѣдовательно (аксіома 5)

$$\angle b + \angle \text{ABC} = 2d, \quad \text{и} \quad \angle e + \angle \text{ABC} = 2d.$$

Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе 1-ое. Эта теорема справедлива также и для тупого угла, и справедливость ея не зависитъ отъ того, гдѣ пересѣкаются перпендикуляры къ сторонамъ угла—внутри или внѣ его.

Замѣчаніе 2-е. Теорему 42 формулируютъ также слѣдующимъ образомъ: если стороны одного угла перпендикулярны сторонамъ другого, то эти углы либо равны между собою, либо же взаимно дополняютъ другъ друга до $2d$.

§ 5. О треугольникахъ, условіяхъ ихъ равенства и о перпендикулярныхъ и наклонныхъ линіяхъ.

Опредѣленія. Ограниченная конечными прямыми линіями фигура, всѣ точки которой лежатъ въ одной плоскости, называется *прямолинейной фигурой*; отрѣзки прямыхъ, ее ограничивающія, называются *сторонами* ея, концы этихъ отрѣзковъ—*вершинами*.

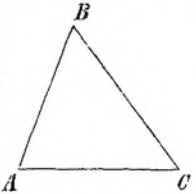
Теорема 43. Если соединить прямыми три точки, лежащія въ плоскости, но не на одной прямой, то получится прямолинейная фигура, въ которой три стороны и три угла.

Доказательство. Пусть даны три точки A, B и C, не лежащія на одной прямой, и пусть онѣ соединены каждая съ каждою прямыми; требуется доказать, что получится фигура, въ которой три стороны и три угла.—Для доказательства этого замѣтимъ, что отъ соединенія точки A съ точкою B прямою и, обратно,

точки B съ точкою A прямою, въ результатѣ получается одна прямая (теорема 1); то же справедливо относительно прямой, соединяющей всякія другія двѣ точки изъ числа данныхъ трехъ. Такимъ образомъ всѣ стороны этой прямолинейной фигуры получатся, если первую точку соединимъ прямыми съ остальными двумя и эти послѣднія двѣ—одну съ другою; число сторонъ, слѣдовательно, равно тремъ; кромѣ того, каждая изъ данныхъ точекъ служитъ вершиною нѣкотораго угла (притомъ отличающагося отъ нуля и отъ выпрямленнаго). Стало-быть, въ этомъ случаѣ получается прямолинейная фигура, въ которой три стороны и три угла. Что и требовалось доказать.

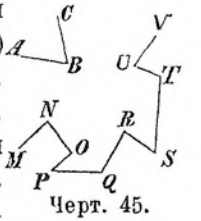
Опредѣленія. Фигура, которая образована тремя конечными прямыми, соединяющими три точки плоскости, не лежащія на одной прямой, называется *треугольникомъ*. Каждая изъ трехъ прямыхъ, образующихъ треугольникъ, называется *стороною* его, а каждая изъ точекъ взаимнаго пересѣченія сторонъ—*вершиною*. О каждомъ изъ угловъ треугольника говорятъ, что онъ *заключенъ* между сторонами своими, а также—что онъ *прилежитъ* къ любой изъ сторонъ своихъ и *противолежитъ* третьей сторонѣ треугольника; *о каждой же* изъ сторонъ треугольника говорятъ, что она *противолежитъ* углу, заключенному между остальными сторонами. Углы и стороны треугольника носятъ общее названіе его *элементовъ*.

На черт. 44 изображенъ треугольникъ, сторонами котораго служатъ отрѣзки AB, BC и AC, у котораго углы CAB, ACB и ABC, а вершины—точки A, B и C; ∠A *заключенъ* между сторонами AB и AC, *прилежитъ* къ сторонѣ AB (или къ сторонѣ AC) и *противолежитъ* сторонѣ BC; сторона BC, въ свою очередь, *противолежитъ* углу A. Стороны AB, AC и BC и углы A, B и C суть элементы треугольника ABC. На письмѣ слово „треугольникъ“ замѣняется иногда знакомъ △ или же сокращеннымъ обозначеніемъ: тр—къ.



Черт. 44.

Ломаною называется линія, составленная изъ двухъ или большаго числа конечныхъ прямыхъ такъ, что каждая съ слѣдующею образуетъ уголъ, отличающійся отъ нуля и отъ выпрямленнаго угла. Такъ (черт. 45) линіи ABC и MNOPQRSTU суть линіи ломаныя. Ломаныя различаются *замкнутыя* и *незамкнутыя*. Замкнутою называется ломаная, въ которой вторая точка послѣдней конечной прямой совпадаетъ съ первою крайнею точкою первой; незамкнутою—ломаная, въ которой вторая крайняя точка послѣдней прямой не

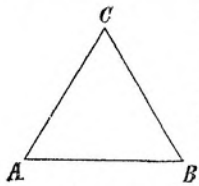


Черт. 45.

совпадаетъ съ первою точкою первой прямой. Каждыя двѣ стороны треугольника, разсматриваемыя вмѣстѣ, составляютъ не замкнутую ломаную линію, всѣ три стороны его—ломаную замкнутую.

Теорема 44. Во всякомъ треугольникѣ сумма любыхъ двухъ сторонъ его больше третьей.

Доказательство. Пусть данъ тр—къ ABC (черт. 46); требуется доказать, что сумма любыхъ двухъ сторонъ его болѣе третьей.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что отрѣзокъ прямой, проведенный чрезъ двѣ точки, менѣе отрѣзка всякой другой линіи, проведеннаго чрезъ тѣ же точки (допущеніе 6-ое относительно прямой); а потому, разсматривая сумму каждыхъ двухъ сторонъ треугольника какъ отрѣзокъ нѣкоторой ломаной, получимъ неравенства:



Черт. 46.

$$AB + BC > AC,\ AB + AC > BC,\ \text{и}\ AC + BC > AB.$$

Что и требовалось доказать.

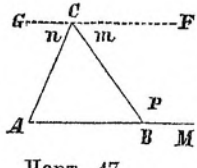
Слѣдствіе. Каждая сторона треугольника болѣе разности остальныхъ двухъ сторонъ. — Дѣйствительно: принявъ выше выведенныя неравенства и вычтя изъ неравныхъ величинъ поровну (аксіома 9), мы получимъ неравенства:

$$AB > AC - BC,\ \text{или}\ BC > AC - AB,$$
$$AB > BC - AC,\ \text{или}\ AC > BC - AB,$$
$$AC > AB - BC,\ \text{или}\ BC > AB - AC.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 45. Сумма угловъ треугольника равна $2\ d$.

Доказательство. Пусть (черт. 47) данъ $\triangle$ ABC; требуется доказать, что $\angle A + \angle B + \angle C = 2\ d$ —Для доказательства этого изъ какой нибудь вершины даннаго треугольника, напр., изъ вершины C проведемъ прямую CF параллельно къ AB и продолжимъ ее въ противоположную сторону; обозначимъ углы, образованные прямыми CF и CG съ прямыми CB и CA, буквами m и n. Прямая $GF \parallel AB$, а прямыя CB и AB ихъ сѣкущія; а потому $\angle m = \angle B$ и $\angle n = \angle A$ (теорема 30). Но $\angle n + \angle C + \angle m = 2d$ (теор. 11); стало-быть (аксіома 5):



Черт. 47.

$$\angle A + \angle C + \angle B = 2d.$$

Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1-ое. Сумма двухъ угловъ треугольника меньше $2\ d$.—Дѣйствительно: такъ какъ сумма *всѣхъ трехъ* угловъ треугольника равна $2d$, то сумма двухъ изъ нихъ должна быть меньше, чѣмъ $2\ d$ (аксіома 1-ая).

Слѣдствіе 2-е. Если одинъ изъ угловъ треугольника прямой, то каждый изъ остальныхъ—острый.—Дѣйствительно: если одинъ изъ угловъ треугольника прямой, то сумма остальныхъ двухъ должна быть равна прямому; стало-быть, каждый изъ нихъ долженъ быть острый.

Слѣдствіе 3-е. Если одинъ изъ угловъ треугольника тупой, то каждый изъ остальныхъ—острый.—Дѣйствительно: если одинъ изъ угловъ треугольника тупой, то сумма остальныхъ двухъ должна быть равна нѣкоторому острому углу; стало-быть, каждый изъ нихъ долженъ быть острый.

Слѣдствіе 4-ое. Если изъ двухъ угловъ треугольника каждый равенъ $\frac{2}{3}d$, то и третій уголъ равенъ $\frac{2}{3}d$. —Дѣйствительно: если изъ двухъ угловъ каждый равенъ $\frac{2}{3}d$, то третій уголъ равенъ $2d - \frac{4}{3}d$, т. е. равенъ $\frac{2}{3}d$.

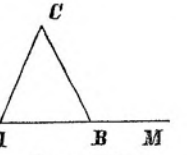
Слѣдствіе 5-ое. Если два угла одного треугольника порознь равны двумъ угламъ другого, то и третьи углы ихъ равны между собою.

Замѣчаніе. Вообще, если два угла даннаго треугольника извѣстны, то третій легко можетъ быть найденъ вычитаніемъ суммы ихъ изъ выпрямленнаго.

Опредѣленія. Треугольникъ, въ которомъ всѣ углы острые, называется *остроугольнымъ*; треугольникъ, въ которомъ одинъ изъ угловъ тупой, называется *тупоугольнымъ*; треугольникъ, въ которомъ одинъ изъ угловъ прямой, называется *прямоугольнымъ*.

Въ прямоугольномъ треугольникѣ стороны, образующія прямой уголъ, называются *катетами* его, а сторона, противолежащая прямому углу—*гипотенузою*.

Каждый изъ угловъ треугольника называется *внутреннимъ угломъ* его. *Внѣшнимъ угломъ треугольника* называется уголъ, смежный съ однимъ изъ внутреннихъ угловъ его. Такъ (черт. 48) уголъ СВМ, смежный съ угломъ АВС даннаго тр—ка АВС, есть одинъ изъ внѣшнихъ угловъ треугольника АВС.



Черт. 48.

Теорема 46. Внѣшній уголъ треугольника равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ угловъ того же треугольника, съ нимъ не смежныхъ.

Доказательство. Пусть внѣшній уголъ МВА даннаго треугольника АВС обозначенъ буквою Р (черт. 48), а углы треугольника буквами А, В, С; требуется доказать, что $\angle P = \angle A + \angle C$. —Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что (теорема 45)

$$\angle A + \angle B + \angle C = 2d$$

и что также (теорема 8) $\angle P + \angle B = 2d$.

Отсюда получимъ (аксіома 6):

$$\angle P + \angle B = \angle A + \angle B + \angle C$$

или (аксіома 8):

$$\angle P = \angle A + \angle C.$$

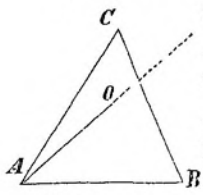
Что̀ и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Внѣшній уголъ треугольника больше каждаго изъ внутреннихъ, съ нимъ не смежныхъ.—Дѣйствительно: такъ какъ внѣшній уголъ треугольника равенъ суммѣ обоихъ внутреннихъ угловъ съ нимъ не смежныхъ, то онъ больше каждаго изъ нихъ въ отдѣльности (аксіома 1-ая).

Замѣчаніе. Въ остроугольномъ тр—кѣ каждый изъ внѣшнихъ угловъ тупой; въ тупоугольномъ—одинъ острый, остальные тупые; въ прямоугольномъ—одинъ прямой, остальные—тупые. Учащемуся предоставляется убѣдиться въ этомъ помощью разсужденій.

Теорема 47. Если одну изъ вершинъ треугольника прямою линіею соединить съ точкою, взятою внутри его, то эта прямая, по достаточномъ продолженіи, пересѣчетъ сторону, противолежащую этой вершинѣ.

Доказательство. Пусть (черт. 49) дана внутри тр—ка ABC точка O, пусть вершина A соединена съ нею прямой AO; требуется доказать, что прямая AO по достаточномъ продолженіи пересѣчетъ сторону BC тр—ка ABC.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что (слѣдствіе 1-ое теоремы 45)



Черт. 49

$$\angle CAB + \angle CBA < 2d$$

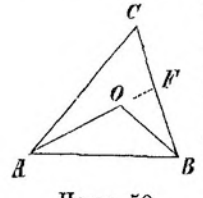
слѣдовательно и подавно (аксіомы 1-ая и 7-ая)

$$\angle OAB + \angle ABC < 2d;$$

а въ такомъ случаѣ, на основаніи Евклидова постулата, прямая AO пересѣчетъ прямую BC. Что и требовалось доказать.

Теорема 48. Если взятую внутри треугольника точку соединить съ любыми двумя вершинами его, то полученная такимъ образомъ внутренняя ломаная менѣе внѣшней, имѣющей тѣ же концы.

Доказательство. Пусть (черт. 50) точка O лежитъ внутри треугольника ABC; требуется доказать, что $AO + OB < AC + CB$.—Для доказательства этого продолжимъ прямую AO до пересѣченія съ прямою CB (теорема 47). Пусть точка пересѣченія прямой AO со стороною BC будетъ точка F. Получимъ слѣдующія три ломаныя: ACB, AFB и AOB. Ломаная ACB больше ломаной AFB, потому что



Черт. 50.

$$AC + CF > AF.$$

Ломаная AFB больше ломаной AOB, потому что

$$OF + FB > OB.$$

Итакъ,

$$\text{лом. } ACB > \text{лом. } AFB, \text{ а лом. } AFB > \text{лом. } AOB;$$

слѣдовательно и подавно (аксіома 7-ая)

$$\text{лом. } ACB > \text{лом. } AOB,$$

т. е.

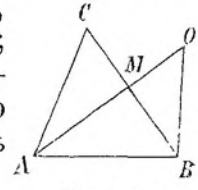
$AC + CB > AO + OB$ или (аксіома 2-ая) $AO + OB < AC + CB$.

Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Если точку, взятую внутри угла, вертикальнаго по отношенію къ какому-либо углу тр-ка, соединить съ вершинами остальныхъ двухъ его угловъ, то полученная такимъ образомъ внѣшняя ломаная болѣе внутренней. — Дѣйствительно: въ этомъ случаѣ третья вершина даннаго тр-ка является точкою, взятою внутри нѣкотораго треугольника, и внутренняя ломаная въ немъ меньше внѣшней (теорема 48), а внѣшняя больше внутренней (аксіома 4-ая).

Теорема 49. Если точку, взятую внѣ треугольника, но внутри одного изъ угловъ его, соединить съ вершиною этого угла и съ одною изъ остальныхъ вершинъ треугольника, то сумма пересѣкающихся при этомъ отрѣзковъ прямыхъ линій болѣе суммы отрѣзковъ, заключенныхъ между ними.

Доказательство. Пусть (черт. 51) данъ $\triangle ABC$ и пусть точка O внѣ треугольника, но внутри угла A; пусть, далѣе, точка O соединена съ вершинами A и B; требуется доказать, что $AO + BC > AC + BO$.— Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что сумма $AO + CB$ состоитъ изъ суммы четырехъ отрѣзковъ AM, MC, MO и MB; но



Черт. 51.

$AM + MC > AC$ а $MO + MB > BO$;

стало быть (аксіомы 9, 2 и 5):

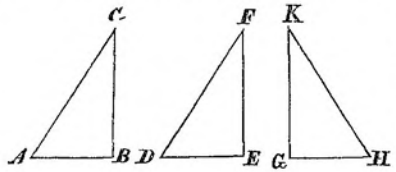
$$AO + BC > AC + BO.$$

Что и требовалось доказать.

Опредѣленіе. Треугольники, которые могутъ быть наложены одинъ на другой такъ, чтобы вершины одного совпали съ вершинами другого, называются *равными треугольниками*. Нѣкоторые авторы (преимущественно иностранные) называютъ равные треугольники *совмѣстимыми* въ отличіе отъ треугольниковъ, въ коихъ части плоскости, которыя они занимаютъ, одинаковы только по величинѣ своей.

Замѣчаніе 1-ое. Иногда для совмѣщенія равныхъ между собою треугольниковъ, лежащихъ въ одной плоскости, достаточно привести одинъ изъ нихъ въ приличное для того движеніе въ той

же плоскости. Иногда же для совмѣщенія двухъ равныхъ треугольниковъ, лежащихъ въ одной плоскости, необходимо предварительно перегнуть одинъ изъ нихъ вокругъ одной изъ его сторонъ до совмѣщенія съ плоскостью другого треугольника, и тогда только возможно привести эти два треугольника къ совмѣщенію. На черт. 52 изображены три треугольника ABC, DEF и GHK,



Черт. 52.

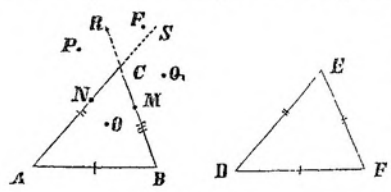
изъ которыхъ △ ABC можетъ быть совмѣщенъ съ △ DEF безъ всякаго вращенія одного изъ нихъ вокругъ одной изъ его сторонъ; что же касается △ GHK, то онъ ни съ однимъ изъ остальныхъ двухъ треугольниковъ совмѣщенъ быть не можетъ, если его предварительно не перегнуть вокругъ одной изъ его сторонъ.

Замѣчаніе 2-ое. Когда два треугольника совпали, то стороны одного изъ нихъ порознь равны сторонамъ другого, а углы, противолежащіе равнымъ другъ другу сторонамъ тоже между собою равны.

Замѣчаніе 3-е. Для обозначенія равенства треугольниковъ, напр. тр-ковъ ABC и DEF, на письмѣ употребляютъ знакъ равенства, который ставится такъ: △ ABC = △ DEF; но нѣкоторые авторы знаку равенства предпочитаютъ сложный знакъ ∞, смыслъ котораго однако не можетъ быть поясненъ въ этомъ мѣстѣ.

Теорема 50. Если три стороны одного треугольника порознь равны тремъ сторонамъ другого, то треугольники равны между собою, т. е. совмѣстимы.

Доказательство. Пусть (черт. 53) даны два треугольника ABC и DEF, въ которыхъ сторона AC равна DE, сторона AB равна



Черт. 53.

DF, а сторона BC равна EF; требуется доказать, что эти треугольники равны между собою.— Для доказательства этого наложимъ второй треугольникъ на первый такъ, чтобы вершина D совпала съ вершиною A, а сторона DF пошла по сторонѣ AB; вслѣдствіе равенства этихъ сторонъ вершина F совпадетъ съ вершиною B. Но при этомъ пусть второй треугольникъ наложенъ на первый такъ, что вершина E упала по ту же сторону прямой AB, гдѣ лежитъ вершина C; тогда вершина E должна совпасть съ вершиною C. Для доказательства этого предположимъ, что она не совпадетъ съ вершиною C; т. е. она должна упасть либо внутрь треугольника ABC, либо на одну изъ сторонъ AC или BC, либо-же, наконецъ,

внѣ треугольника ABC. 1) Еслибы она упала внутрь треугольника ABC, напр., въ точку O, то получилось-бы, что

$$AO = DE, \quad BO = EF;$$

стало-быть, получилось бы (аксіома 8-ая), что

$$AO + BO = DE + EF;$$

но по условію $DE = AC$, а $EF = BC$, слѣд. (аксіома 8-ая)

$$DE + EF = AC + BC;$$

такимъ образомъ получилось-бы, что (аксіома 5-ая)

$$AO + BO = AC + BC,$$

т. е. что внутренняя ломаная равна внѣшней, чего быть не можетъ (теорема 48). Слѣд. точка F не можетъ совпасть ни съ какою точкою, лежащею внутри тр-ка ABC. 2) Еслибы точка E упала на сторону BC, но при этомъ совпала бы не съ вершиною C, а съ какою-нибудь точкою M, то получилось-бы, что

$$MB = EF, \; EF = BC, \text{ стало быть, } MB = CB,$$

чего тоже быть не можетъ. Такая же нелѣпость получилась бы, еслибы точка E совпала бы съ какою-нибудь точкою N стороны AC, или съ какою нибудь точкою продолженій CR и CS сторонъ BC и AC; а потому точка E не можетъ совпасть ни съ какою точкою сторонъ AC и BC и ихъ продолженій. 3) Еслибы точка E совпала съ какою-нибудь точкою T, лежащею внѣ треугольника ABC, но внутри угла, вертикальнаго углу C, то тогда мы получили бы, что $AT = AB$, а $BT = BC$, откуда мы получили бы, что

$$AT + BT = AB + BC,$$

т. е. что внѣшняя ломаная равна внутренней. Чего быть не можетъ (теорема 48). Наконецъ, 4) если бы точка E совпала съ какою нибудь точкою P, лежащею внѣ тр-ка, но внутри одного изъ угловъ его, напр., внутри угла B, то тогда получилось-бы, что

$DE = AP$, а $FE = BP$; но $DE = AC$, а $FE = BC$;

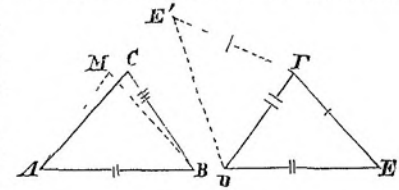
стало-быть, получилось-бы (аксіома 5-ая), что $AC = AP$, а $BP = BC$, откуда (аксіома 8-ая):

$$AC + BP = AP + BC,$$

т. е. получилось-бы, что хотя точка P лежитъ внѣ тр-ка и внутри одного изъ его угловъ и соединена съ вершиною этого угла и одною изъ остальныхъ вершинъ, но при этомъ сумма пересѣкающихся стрѣзковъ равна суммѣ не пересѣкающихся, чего тоже быть не можетъ (теорема 49). Такую же нелѣпость мы получили-бы, если бы предположили, что точка E совпала съ точкою Q, лежащею внѣ тр—ка ABC, но внутри угла A. Отсюда видимъ, что точка F не можетъ совпасть ни съ какою точкою плоскости треугольника ABC, кромѣ точки C. Стало-быть, она должна со-

впасть съ точкою C, а въ такомъ случаѣ треугольники ABC и DEF равны между собою. Что̀ и требовалось доказать.

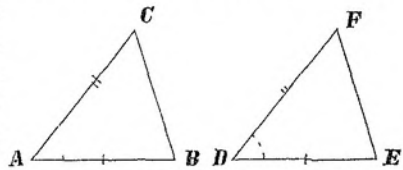
Замѣчаніе. Иногда случается, что при наложеніи треугольника DEF (черт. 54) на треугольникъ ABC, они не совпадаютъ, хотя стороны одного порознь равны сторонамъ другого. Такъ, если AB = DE, AC = EF и BC = DF, и если вершина D совпала съ вершиною A, вершина E съ B, то вершина F при этомъ совпадаетъ не съ C, а съ точкою M той же плоскости, лежащей внѣ тр-ка ABC; при этомъ равныя прямыя MB и AC пересѣкаются, а равныя прямыя AM и BC лежатъ однавнѣ другой. Несмотря однако на это, данные треугольники ABC и DEF могутъ быть приведены къ совмѣщенію, если предварительно одинъ изъ нихъ, напр., второй, перегнуть вокругъ прямой DF такъ, чтобы онъ принялъ положеніе тр-ка DE′F. Послѣ того какъ это сдѣлано, △ DE′F, т. е. △ DEF, совмѣстится съ треугольникомъ ABC, если наложить первый изъ нихъ на второй такъ, чтобы точка E′ или E совпала съ точкою A, а точка D совпала съ точкою B.



Черт. 54.

Теорема 51. Если двѣ стороны одного треугольника порознь равны двумъ сторонамъ другого и если притомъ углы, заключенные между ними, тоже равны между собою, то треугольники равны между собою, т. е. совмѣстимы.

Доказательство. Пусть (черт. 55) въ тр кахъ ABC и DEF стороны AB = DE, AC = DF и ∠A = ∠D; требуется доказать, что эти тр-ки равны.—Для доказательства этого наложимъ △ DEF на △ ABC такъ, чтобы вершина D совпала съ вершиною A, а прямая DE пошла AB; такъ какъ, по условію, сторона DE = AB, то точка E совпадетъ съ точкою B. (При этомъ △ DEF наложенъ на △ ABC такъ, чтобы точка F упала по ту же сторону прямой AB, гдѣ лежитъ точка C). Такъ какъ ∠D равенъ углу A, то сторона DF пойдетъ по сторонѣ AC; но, по условію, сторона DF = AC, а потому вершина F совпадетъ съ C. Такимъ образомъ вершины тр-ка DEF совпали, по наложеніи его на △ ABC, съ вершинами этого послѣдняго. Стало-быть, тр-ки ABC и DEF равны между собою. Что̀ и требовалось доказать.



Черт. 55.

Слѣдствіе 1-ое. Если катеты одного прямоугольнаго треугольника порознь равны катетамъ другого, то треугольники равны

между собою.—Дѣйствительно: въ этомъ случаѣ двѣ стороны одного тр-ка порознь равны двумъ сторонамъ другого, и углы, ими образованные, тоже между собою равны.

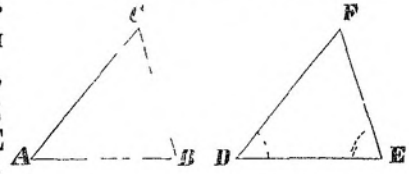
Слѣдствіе 2-ое. Если изъ средины конечной прямой провести перпендикуляръ къ этой прямой, то любая точка этого перпендикуляра находится на одинаковомъ разстояніи отъ концовъ данной прямой.—Дѣйствительно: соединивъ эту точку съ концами прямой, получимъ два равныхъ прямоугольныхъ треугольника, въ которыхъ и гипотенузы равны между собою.

Замѣчаніе 1-ое. Если двѣ стороны одного тр-ка порознь равны двумъ сторонамъ другого и если притомъ углы, заключенные между ними, тоже равны между собою, то, въ виду совмѣстимости самыхъ тр-ковъ, и третьи стороны между собою равны. Ср. теорему 53, которая такимъ образомъ является теоремою, противоположною теоремѣ 51.

Замѣчаніе 2-ое. Иногда случается, что для совмѣщенія треугольниковъ, въ которыхъ двѣ стороны одного порознь равны двумъ сторонамъ другого и углы, образованные этими сторонами, тоже равны, необходимо раньше всего перегнуть одинъ изъ нихъ вокругъ одной изъ сторонъ его; но это нисколько не вліяетъ ни на справедливость теоремы, ни на сущность ея доказательства.

Теорема 52. Если сторона одного треугольника и оба угла, прилежащіе къ ней, порознь равны сторонѣ и прилежащимъ къ ней угламъ другого треугольника, то эти треугольники равны между собою, т. е. совмѣстимы.

Доказательство. Пусть (черт. 56) сторона AB треугольника ABC равна стороны DE треугольника DEF и пусть $\angle A = \angle D$, а $\angle B = \angle E$; требуется доказать, что $\triangle ABC = \triangle DEF$.—Для доказательства этого наложимъ $\triangle DEF$ на $\triangle ABC$ такъ, чтобы вершина D совпала съ вершиною A, прямая DE пошла по прямой AB; такъ какъ DE = AB, то точка E совпадетъ съ точкою B; такъ какъ $\angle D = \angle A$, то сторона DE пойдетъ по сторонѣ AC; такъ какъ $\angle E = \angle B$, то сторона EF пойдетъ по сторонѣ BC. Точка F, стало-быть, должна въ одно и то же время быть на прямой AC и на прямой BC, т. е. должна совпасть съ точкою C ихъ пересѣченія (слѣдствіе 3-е теоремы 1). Стало-быть, вершины тр-ка DEF, по приличномъ наложеніи его на $\triangle ABC$, совпали съ вершинами этого послѣдняго, т. е. тр-ки эти равны между собою. Что и требовалось доказать.



Черт. 56.

Слѣдствіе 1-ое. Если катетъ и прилежащій къ нему острый уголъ одного прямоугольнаго треугольника порознь равны катету и прилежащему къ нему острому углу другого, то треугольники равны.—Дѣйствительно: прилежащіе къ тѣмъ же катетамъ прямые углы равны между собою, стало-быть, сторона и два къ ней прилежащихъ угла одного тр-ка порознь равны тѣмъ же элементамъ другого.

Слѣдствіе 2-ое. Если катетъ и противолежащій ему уголъ одного прямоугольнаго треугольника порознь равны катету и противолежащему углу другого, то треугольники равны между собою.—Дѣйствительно: такъ какъ противолежащіе катетамъ углы равны, то и прилежащіе къ нимъ острые углы тоже равны (слѣдствіе 5-ое теоремы 45).

Слѣдствіе 3-е. Если гипотенуза и одинъ изъ острыхъ угловъ одного прямоугольнаго треугольника порознь равны гипотенузѣ и одному изъ острыхъ угловъ другого, то треугольники равны между собою. — Дѣйствительно: такъ какъ одинъ изъ острыхъ угловъ одного прямоугольнаго треугольника равенъ острому углу другого, то и второй острый уголъ перваго тр-ка равенъ второму острому углу другого (слѣдствіе 5-ое теоремы 45); стало-быть, сторона и два угла, прилежащихъ къ ней въ одномъ треугольникѣ, порознь равны такимъ же элементамъ другого.

Замѣчаніе 1-ое. Въ этихъ, точно также какъ и предыдущихъ случаяхъ, иногда для совпаденія треугольниковъ предварительно необходимо перегнуть одинъ изъ треугольниковъ вокругъ одной изъ сторонъ его; но отъ этого не страдаетъ ни справедливость теоремъ, ни способъ ихъ доказательства.

Замѣчаніе 2-ое. Выше доказаны три теоремы, характеризующія собою *три признака*, съ помощью которыхъ можно безъ наложенія судить о равенствѣ данныхъ двухъ треугольниковъ, если они между собою равны. Эти признаки извѣстны также подъ именемъ *условій равенства треугольника*. По само собою разумѣется, что это не единственные признаки или условія равенства треугольниковъ; треугольники равны между собою также и при безчисленномъ множествѣ другихъ условій, которыхъ перечисленіе поэтому невозможно и не относится къ предмету Геометріи.

Замѣчаніе 3-е. Разсмотрѣнныя выше три условія равенства треугольниковъ можно выразить также и въ слѣдующей формѣ: 1) три стороны вполнѣ опредѣляютъ треугольникъ; 2) двѣ стороны и уголъ, заключенный между ними, вполнѣ опредѣляютъ треугольникъ; 3) сторона и два прилежащихъ къ ней угла вполнѣ опредѣляютъ треугольникъ.—Это значитъ, что если дана одна изъ

этихъ совокупностей элементовъ треугольника, то всѣ треугольники съ этими элементами равны между собою.

Въ Тригонометріи (наукѣ, изучающей способы нахожденія неизвѣстныхъ элементовъ треугольника по достаточному для того числу извѣстныхъ) разсматриваются многіе другіе случаи, когда треугольникъ вполнѣ опредѣляется данными величинами.

Теорема 53 (противоположная теоремѣ 52). Если двѣ стороны одного треугольника порознь равны двумъ сторонамъ другого, а углы, заключенные между ними, не равны между собою, то въ треугольникѣ съ бо̀льшимъ угломъ третья сторона больше третьей стороны треугольника съ меньшимъ угломъ.

Доказательство. Пусть въ треугольникахъ ABC и DEF сторона AB = DE, AC = DF, а $\angle A > \angle D$; требуется доказать, что сторона BC > EF.— Для доказательства этого (выполненіе чертежей предоставляется, въ качествѣ весьма полезнаго упражненія, учащемуся) наложимъ $\triangle$ DEF на $\triangle$ ABC такъ, чтобы сторона DE совпала со стороною AB, а вершина F упала по ту же сторону прямой AB, по которую находится точка C. Тогда точка F должна (смотря по формѣ тр-ковъ) совпасть либо съ какою-нибудь точкою M внутри ABC, либо съ нѣкоторою точкою N на сторонѣ BC, либо же, наконецъ, съ нѣкоторою точкою P внѣ треугольника ABC, но внутри угла A. Въ первомъ случаѣ получимъ (теорема 48): AC + BC > AM + MB. или (аксіома 5) AC + BC > DF + FE, откуда (аксіома 9)

$$BC > FE;$$

во второмъ получимъ, на основаніи аксіомы 1-ой, что

$$BC > FE;$$

въ третьемъ, наконецъ, получимъ, что (теорема 49) AP + BC > AC + BP, или (аксіома 5) AP + BC > DF + FE, откуда (аксіома 9)

$$BC > FE.$$

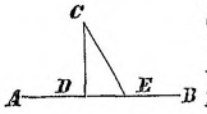
Стало-быть, какое бы положеніе ни приняла точка F, по надлежащемъ наложеніи тр-ка DEF на $\triangle$ ABC, мы во всякомъ случаѣ получимъ, что BC > FE. Что̀ и требовалось доказать.

Теорема 54 (обратная теоремѣ 53). Если двѣ стороны одного треугольника порознь равны двумъ сторонамъ другого, а третьи стороны не равны между собою, то въ треугольникѣ съ большей третьей стороною ей противолежитъ уголъ, больній угла, противолежащаго третьей сторонѣ въ треугольникѣ съ меньшею третьей стороною.

Доказательство этой теоремы ведется по способу отъ противоположнаго и предоставляется учащемуся.

Замѣчаніе. Если доказана какая-нибудь теорема, то обратная противоположной этой теоремѣ тоже доказана. Поэтому если доказана противоположная какой-либо теоремѣ, то обратная той же теоремѣ легко доказывается способомъ приведенія къ нелѣпости; обратно, если доказана обратная какой-либо прямой теоремѣ, то и противоположная той же прямой теоремѣ легко можетъ быть доказана способомъ приведенія къ нелѣпости.

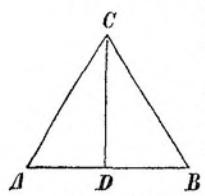
Опредѣленіе. *Концомъ радіуса* окружности называется точка его пересѣченія съ окружностью. Проведя въ кругѣ два радіуса, образующіе уголъ, большій нуля, но меньшій выпрямленнаго, и соединивъ прямою концы этихъ радіусовъ, получимъ треугольникъ, въ которомъ двѣ стороны равны между собою. Треугольникъ, въ которомъ двѣ стороны равны между собою, называется *равнобедреннымъ*. *Вершиною* его называется преимущественно предъ другими точка пересѣченія равныхъ между собою сторонъ его, *основаніемъ*—третья сторона его, а *высотою*—перпендикуляръ, проведенный изъ вершины къ основанію. Если изъ точки, взятой внѣ прямой къ этой прямой проведены перпендикуляръ и наклонная, то точки пересѣченія перпендикуляра и наклонной съ данной прямою называются *подножіями* или основаніями перпендикуляра и наклонной, а конечная прямая, соединяющая эти подножія—*проэкціею наклонной на данную прямую*. Такъ (черт. 57), если изъ точки C, взятой внѣ прямой AB, проведены къ ней перпендикуляръ CD и наклонная CE, то точка D есть подножіе перпендикуляра, точка E—подножіе наклонной, а прямая DE—проэкція наклонной CE на AB.



Черт. 57.

Теорема 55. Если въ равнобедренномъ треугольникѣ соединить прямою средину основанія съ вершиною противолежащаго ему угла, то эта прямая раздѣлитъ данный равнобедренный треугольникъ на два равныхъ между собою треугольника.

Доказательство. Пусть (черт. 58) точка D есть средина основанія равнобедреннаго треугольника ABC; требуется доказать, что CD перпендикулярна къ AB.—Для доказательства этого разсмотримъ два тр—ка ACD и BCD. Въ нихъ по условію AC=BC; кромѣ того, AD = DB потому, что точка D, по условію, середина прямой AB; наконецъ, сторона CD общая, т. е. CD = CD. Поэтому въ тр—кахъ ACD и BCD три стороны одного порознь равны тремъ сторонамъ другого, и треугольники эти равны между собою (теорема 50). Что и требовалось доказать.



Черт. 58.

Слѣдствіе 1-е. Прямая, соединяющая вершину равнобедреннаго треугольника съ срединою его основанія, перпендикулярна къ основанію.—Дѣйствительно: прямая, соединяющая вершину равнобедреннаго треугольника съ срединою его основанія, раздѣляетъ треугольникъ на два равныхъ треугольника, въ которыхъ противъ равныхъ сторонъ лежатъ равные углы, т. е. $\angle ADC = \angle BDC$, а въ такомъ случаѣ эго прямые углы.

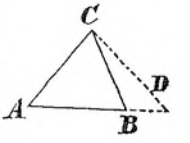
Слѣдствіе 2-е. Прямая, соединяющая вершину равнобедреннаго треугольника съ срединою основанія дѣлитъ уголъ, противолежащій основанію, пополамъ.—Дѣйствительно: изъ равенства полученныхъ тр—ковъ вытекаетъ, что $\angle ACD = \angle BCD$.

Слѣдствіе 3-е. Въ равнобедренномъ треугольникѣ углы, противолежащіе его равнымъ сторонамъ, равны между собою.—Дѣйствительно: раздѣливъ основаніе пополамъ и соединивъ его съ вершиною равнобедреннаго тр—ка, получимъ два равные тр—ка, въ которыхъ $\angle A = \angle B$, такъ какъ $\angle A$ противолежитъ сторонѣ CD въ одномъ, а $\angle B$ противолежитъ той же сторонѣ CD въ другомъ изъ равныхъ между собою тр—ковъ.

Замѣчаніе. Если данъ одинъ изъ угловъ равнобедреннаго треугольника и если притомъ извѣстно, противолежитъ ли онъ или прилежитъ основанію, то остальные углы могутъ быть опредѣлены на основаніи теоремы 45 (сумма всѣхъ трехъ угловъ тр—ка равна $2d$) и на основаніи слѣдствія 3-го теоремы 55.

Лемма 2-ая. Если изъ вершины даннаго треугольника провести къ противолежащей сторонѣ перпендикуляръ и если углы, прилежащіе къ этой сторонѣ, оба острые, то этотъ перпендикуляръ встрѣтитъ сторону въ точкѣ, лежащей между концами этой стороны.

Доказательство. Пусть (черт. 63) углы A и B треугольника ABC оба острые; требуется доказать, что если провести перпендикуляръ къ сторонѣ AB, то этотъ перпендикуляръ встрѣтитъ ее въ точкѣ, лежащей между вершинами A и B.—Для доказательства этого предположимъ, что перпендикуляръ, проведенный изъ точки C къ прямой AB, встрѣчаетъ эту послѣднюю въ точкѣ D, лежащей на продолженіи прямой AB. Тогда получится, что внѣшній уголъ ABC тр—ка BDC долженъ быть больше угла BDC (слѣдствіе теоремы 46), т. е. острый уголъ долженъ быть больше прямого; чего быть не можетъ. Стало-быть, если изъ вершины тр—ка провести перпендикуляръ къ противолежащей ей сторонѣ и если углы, прилежащіе къ этой послѣдней, оба острые, то этотъ перпендикуляръ

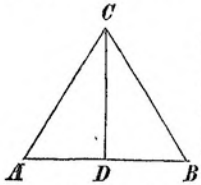


Черт. 63

встрѣтитъ эту сторону въ точкѣ, лежащей между концами этой стороны. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Учащемуся предоставляется, въ качествѣ полезнаго упражненія, убѣдиться въ справедливости слѣдующаго предложенія: если изъ вершины одного изъ острыхъ угловъ тупоугольнаго тр—ка опустить перпендикуляръ на противолежащую сторону, то онъ встрѣтитъ послѣднюю въ точкѣ, лежащей на томъ продолженіи ея, которое образуетъ съ тупымъ угломъ уголъ смежный.

Теорема 56. Если изъ вершины равнобедреннаго треугольника провести перпендикуляръ къ его основанію, то этотъ перпендикуляръ раздѣлитъ равнобедренный треугольникъ на два равныхъ треугольника.



Черт. 59.

Доказательство. Пусть (черт. 59) $\triangle$ ABC есть треугольникъ равнобедренный, въ которомъ AC = BC и пусть прямая CD, проведенная изъ вершины C, перпендикулярна къ основанію AB, т. е. прямая CD—высота даннаго равнобедреннаго тр—ка; требуется доказать, что $\triangle$ ADC = $\triangle$ BDC.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что перпендикуляръ пересѣчетъ сторону AB въ точкѣ D, лежащей между точками A и B (лемма 2-я) и что, такъ какъ $\triangle$ ABC есть треугольникъ равнобедренный, въ которомъ AC = BC, то $\angle A = \angle B$ (слѣдствіе 3-е теоремы 55); стало-быть, имѣемъ два прямоугольныхъ треугольника ADC и BDC, причемъ непремѣнно $\triangle$ ADC = $\triangle$ BDC (слѣдствіе 2-е теоремы 52). Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1-е. Высота равнобедреннаго треугольника раздѣляетъ его основаніе пополамъ.—Убѣдиться въ этомъ предоставляется учащемуся.

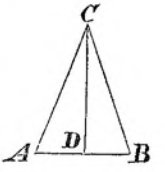
Слѣдствіе 2-е. Высота равнобедреннаго треугольника раздѣляетъ уголъ, противолежащій основанію, пополамъ.—Убѣдиться въ этомъ предоставляется учащемуся.

Слѣдствіе 3-е. Если двѣ наклонныя, проведенныя изъ данной точки къ данной прямой, равны между собою, то и проэкціи ихъ на эту прямую равны.—Дѣйствительно: эти наклонныя вмѣстѣ съ прямою, къ которой онѣ проведены, образуютъ равнобедренный треугольникъ, вершина котораго совпадаетъ съ данной точкою пересѣченія наклонныхъ и въ которомъ изъ вершины опущенъ перпендикуляръ на основаніе.

Теорема 57. Если изъ вершины треугольника провести перпендикуляръ къ противолежащей ей сторонѣ его и если при этомъ перпендикуляръ раздѣлитъ эту сторону пополамъ, то ос-

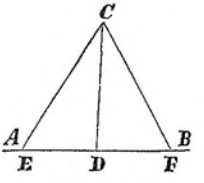
тальныя двѣ стороны равны между собою, и данный треугольникъ—треугольникъ равнобедренный.

Доказательство. Пусть (черт. 60) изъ вершины C тр—ка ABC проведенъ перпендикуляръ CD къ сторонѣ AB и пусть при этомъ AD = BD; требуется доказать, что AC = BC.—Для доказательства этого разсмотримъ тр—ки ADC и BDC; въ нихъ катеты порознь равны между собою, а потому (слѣдствіе 1-е теоремы 51) △ ADC = △ BDC; изъ этого равенства находимъ, что AC = BC, т. е. что △ ABC—треугольникъ равнобедренный. Что и требовалось доказать.



Черт. 60

Слѣдствіе. Если изъ точки, взятой внѣ прямой, проведены двѣ наклонныя до пересѣченія съ прямою и если ихъ проэкціи на эту прямую равны между собою, то наклонныя равны между собою. — Дѣйствительно: если (черт. 61) CD ⊥ AB, а ED = FD, то перпендикуляръ CD раздѣляетъ прямую EF пополамъ, а потому (теорема 57) △ ECF—равнобедренный, въ которомъ CE = CB.

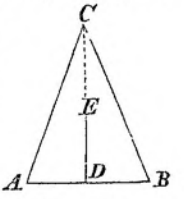


Черт. 61.

Замѣчаніе. Слѣдствіе теоремы 57, представляетъ собою теорему, обратную слѣдствію 3-му теоремы 56.

Теорема 58. Если изъ средины основанія равнобедреннаго треугольника провести перпендикуляръ къ этому основанію, то этотъ перпендикуляръ, продолженный внутрь треугольника, пройдетъ чрезъ вершину его.

Доказательство. Пусть (черт. 62) въ тр—кѣ ABC сторона AC = BC, пусть точка D средина основанія AB, а DE ⊥ AB; требуется доказать, что DE пройдетъ, по достаточномъ продолженіи, чрезъ вершину C.—Для доказательства этого соединимъ вершину C съ точкою D; тогда CD перпендикулярна къ AB (теорема 55) и должна совпасть съ ED (теорема 7). Стало-быть, точка C лежитъ на продолженіи DE. Что и требовалось доказать.



Черт. 62.

Теорема 59. Если въ треугольникѣ два угла равны между собою, то и противолежащія имъ стороны равны между собою, т. е. данный треугольникъ—равнобедренный.

Доказательство. Пусть ∠ A = ∠ B въ тр-кѣ ABC; требуется доказать, что AC = BC, т. е. что △ ABC—равнобедренный.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что углы A и B

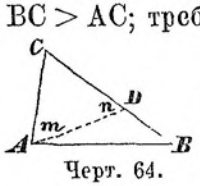
оба острые (въ противномъ случаѣ они не могли бы быть равны между собою); потомъ изъ точки C проведемъ къ AB перпендикуляръ, который долженъ пересѣчь прямую AB въ точкѣ D, находящейся между точками A и B (лемма 2). Тогда получимъ два тр—ка ADC и BDC, въ которыхъ катетъ CD общій, а углы, ему противолежащіе, порознь равны. Слѣдовательно (*слѣдствіе* 2-ое теоремы 52) $\triangle ADC = \triangle BDC$, а въ равныхъ треугольникахъ противъ равныхъ угловъ лежатъ равныя стороны; стало-быть, $AC = BC$ а $\triangle ABC$—равнобедренный. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Если въ треугольникѣ каждый изъ угловъ равенъ $\frac{2}{3}d$, то въ этомъ треугольникѣ всѣ стороны равны между собою.

Опредѣленіе. Треугольникъ, въ которомъ всѣ стороны равны между собою, называется *равносторонним*ъ треугольникомъ.

Теорема 60. Если въ треугольникѣ двѣ стороны не равны между собою, то противъ большей изъ нихъ лежитъ уголъ большій угла, противолежащаго меньшей изъ этихъ двухъ сторонъ.

Доказательство. Пусть (черт. 64) въ тр—кѣ ABC сторона $BC > AC$; требуется доказать, что $\angle A > \angle B$.—Для доказательства этого отъ точки C на сторонѣ BC отложимъ отрѣзокъ CD, равный сторонѣ AC, и соединимъ точку A съ точкою D; получимъ равнобедренный $\triangle ADC$, въ которомъ $\angle m = \angle n$. Но $\angle n > \angle B$ (теорема 46); стало-быть $\angle m > \angle B$, а потому и подавно (аксіома 7) $\angle A > \angle B$. Что и требовалось доказать.



Черт. 64.

Теорема 61 (обратная теоремѣ 60). Если въ треугольникѣ два угла не равны между собою, то и противолежащія имъ стороны между собою тоже не равны.

Доказательство ведется способомъ приведенія къ нелѣпости и предоставляется учащемуся.

Слѣдствіе 1-е. Перпендикуляръ, проведенный изъ данной точки къ данной прямой, меньше всякой наклонной, проведенной изъ той же точки къ той же прямой.—Дѣйствительно: перпендикуляръ лежитъ противъ остраго, а наклонная противъ прямого угла.

Слѣдствіе 2-е. Въ прямоугольномъ треугольникѣ гипотенуза больше каждаго изъ катетовъ.

Слѣдствіе 3-е. Въ тупоугольномъ треугольникѣ противъ тупого угла лежитъ наибольшая сторона этого треугольника.

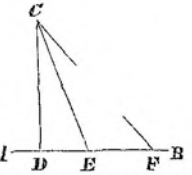
Слѣдствіе 4-е. Если всѣ три угла треугольника различны по величинѣ, то и всѣ три стороны его тоже разной величины.

Опредѣленія. Длину перпендикуляра, проведеннаго изъ данной точки къ данной прямой, называютъ *разстояніемъ* точки

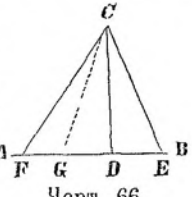
отъ данной прямой. Треугольникъ, въ которомъ всѣ стороны разной величины, называется *разносторонним*ъ.

Теорема 62. Если изъ точки, взятой внѣ прямой, къ этой прямой проведены двѣ наклонныя и если проэкціи этихъ наклонныхъ неравны, то наклонная съ бо́льшей проэкціей бо́льше.

Доказательство. При доказательствѣ этой теоремы различаютъ два случая: когда наклонныя находятся по одну сторону перпендикуляра и когда онѣ находятся по разныя его стороны.— 1) Пусть (черт. 65) къ прямой AB проведены двѣ наклонныя CE и CF, находящіяся по одну сторону перпендикуляра CD; требуется доказать, что CF > CE; ддля оказательства этого примемъ во вниманіе, что ∠ CED острый, ∠ CEF тупой, а △ CEF тупоугольный, т. е. CF > CE (слѣдствіе 3 теор. 61). — 2) Пусть (черт. 66) къ прямой AB проведены двѣ наклонныя CF и CB и пусть DF > DE, а наклонныя находятся по разныя стороны перпендикуляра; требуется доказать, что CF > CE; для доказательства этого отложимъ прямую DG, равную DE, и проведемъ наклонную CG; тогда CF > CG, по CG = CE (слѣдствіе теоремы 57); стало - быть, CF > CE. Такимъ образомъ CF > CE, какъ бы наклонныя ни лежали. Что и требовалось доказать.



Черт. 65.



Черт. 66.

Теорема 63 (обратная теоремѣ 62). Если двѣ наклонныя, опущенныя изъ точки, взятой внѣ прямой, на эту прямую, неравны между собою, то у бо́льшей наклонной бо́льшая проэкція.

Доказательство ведется способомъ отъ противоположнаго и предоставляется учащемуся.

Теорема 64. Если изъ точки, взятой внѣ прямой, въ этой прямой проведены три прямыя до ихъ пересѣченія съ нею, то изъ нихъ только двѣ могутъ быть равны между собою.

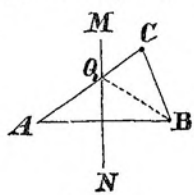
Доказательство. Пусть изъ точки, взятой внѣ прямой, къ ней проведены три прямыя; требуется доказать, что только двѣ изъ нихъ могутъ быть равны между собою.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе два случая: если изъ трехъ проведенныхъ прямыхъ одна перпендикулярна къ данной прямой, то она менѣе (слѣдствіе 1-ое теоремы 60) каждой изъ остальныхъ двухъ, стало-быть, равны между собою могутъ быть въ этомъ случаѣ только послѣднія двѣ; если же всѣ три прямыя суть наклонныя, то только у двухъ изъ нихъ могутъ быть равныя проэкціи; стало-быть, и въ этомъ случаѣ только двѣ изъ данныхъ прямыхъ могутъ быть равны между собою. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Если на окружности взяты три различныхъ точки, то онѣ не лежатъ на одной прямой.—Дѣйствительно: взявъ три точки на окружности и соединивъ ихъ съ центромъ, мы получимъ три равныхъ радіуса. Если бы мы предположили, что эти три точки лежатъ на одной прямой, то мы получили бы, что изъ точки, взятой внѣ этой прямой, проведены къ этой прямой три равныя прямыя. Чего быть не можетъ.

Опредѣленіе. Линія, въ которой никакая произвольно-малая часть ея не представляетъ собою отрѣзка прямой линіи, называется *кривою линіею*. Если кривая линія обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что никакія три точки ея не лежатъ на одной прямой, то эта кривая называется *выпуклою кривою*. Окружность есть линія кривая (теорема 64), притомъ выпуклая (слѣдствіе).

Теорема 65. Если изъ средины конечной прямой провести перпендикуляръ, и если точку взятую въ той же плоскости, но внѣ перпендикуляра, соединить съ концами данной конечной прямой прямыми линіями, то изъ нихъ прямая, пересѣкающая перпендикуляръ, больше прямой, его не пересѣкающей.

Доказательство. Пусть (черт. 67) изъ средины D прямой AB *проведенъ перпендикуляръ* MN *къ этой прямой и пусть точка* C находится внѣ перпендикуляра, но въ той же плоскости; требуется доказать, что CA > CB.—Для доказательства этого соединимъ точку пересѣченія Q съ точкою B. Получимъ $\triangle$ CQB, въ которомъ



Черт. 67.

CQ+QB > CB, (теорема 44); но QB=QA (слѣдствіе теоремы 57); слѣдовательно (аксіома 5)

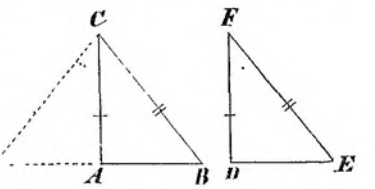
CQ + QA > CB или CA > CB.

Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Такъ какъ каждая точка перпендикуляра, проведеннаго изъ средины данной прямой, находится на равномъ разстояніи отъ концовъ прямой (слѣдствіе теоремы 57), и такъ какъ каждая точка, лежащая внѣ этого перпендикуляра, находится не на одинаковомъ разстояніи отъ концовъ данной прямой, то перпендикуляръ, проведенный изъ средины данной прямой въ данной плоскости къ этой прямой, есть геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, лежащихъ въ данной плоскости и равно-отстоящихъ отъ концовъ данной прямой.

Теорема 66. Если гипотенуза и катетъ одного прямоугольнаго треугольника порознь равны гипотенузѣ и катету другого, то треугольники равны между собою.

Доказательство. Пусть (черт. 68) треугольники ABC и DEF оба прямоугольные, углы A и D прямые, сторона AC равна сторонѣ DF и сторона CB равна сторонѣ FE; требуется доказать, что $\triangle$ ABC $=$ $\triangle$ DEF. — Для доказательства этого наложимъ треугольникъ DEF на плоскость тр-ка ABC такъ, чтобы сторона DF совпала со стороною AC, а точка E легла бы по другую сторону прямой AC. Тогда мы получимъ фигуру E′CB, въ которой AE′ представляетъ собою продолженіе прямой BA, потому что сумма угловъ при точкѣ A, прилегающихъ другъ къ другу, равна двумъ прямымъ (теорема 10). Такимъ образомъ мы получили равнобедренный $\triangle$ E′BC, изъ вершины котораго къ основанію его проведенъ перпендикуляръ. А потому (теорема 56)



Черт. 68.

$$\triangle \text{ ABC} = \triangle \text{ AE′C};$$

но

$$\triangle \text{ DEF} = \triangle \text{ AE′C},$$

потому что при наложеніи $\triangle$ DEF принялъ положеніе этого послѣдняго треугольника. Слѣдовательно (аксіома 6) $\triangle$ ABC $=$ $\triangle$ DEF. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе 1-ое. Приведя въ систему условія равенства прямоугольныхъ треугольниковъ, мы получимъ, что прямоугольный треугольникъ опредѣляется слѣдующими двумя элементами: 1) двумя катетами, 2) катетомъ и прилежащимъ къ нему острымъ угломъ, 3) катетомъ и противолежащимъ ему острымъ угломъ, 4) гипотенузою и острымъ угломъ, 5) гипотенузою и катетомъ.— Конечно, это не всѣ случаи, когда прямоугольные треугольники равны между собою, однако въ геометріи излагаются только указанные случаи. Ср. замѣчаніе 3-е, которымъ снабжена теорема 52.

Замѣчаніе 2-ое. Приведя въ систему тѣ виды треугольниковъ, въ существованіи которыхъ мы убѣдились, мы получимъ слѣдующія двѣ классификаціи треугольниковъ: 1) треугольники различаются: остроугольные, прямоугольные и тупоугольные; и 2) треугольники различаются: равносторонніе, равнобедренные и разносторонніе.— При этомъ равнобедренный треугольникъ можетъ быть либо остроугольнымъ, либо тупоугольнымъ, либо прямоугольнымъ; разносторонній тоже можетъ быть либо остроугольнымъ, либо тупоугольнымъ, либо прямоугольнымъ; равносторонній же треугольникъ принадлежитъ непремѣнно къ классу остроугольныхъ, потому что каждый изъ угловъ его равенъ $\frac{2}{3}\,d$.

§ 6. О многоугольникахъ, параллелограммахъ и трапеціяхъ.

Опредѣленія. Прямолинейная плоская фигура, образованная плоскою замкнутою ломаною линіею, называется *многоугольникомъ*. Условимся *обводомъ многоугольника* называть ломаную линію, его ограничивающую. Каждая изъ конечныхъ прямыхъ, составляющихъ обводъ многоугольника, называется *стороною* многоугольника; точка пересѣченія каждой стороны съ слѣдующею называется *вершиною многоугольника*; уголъ, образованный стороною многоугольника со слѣдующею, называется *угломъ многоугольника*; сумма всѣхъ сторонъ многоугольника, называется его *периметромъ*.

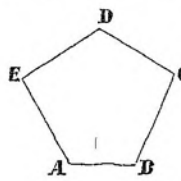
Четыреугольникомъ называется многоугольникъ, въ которомъ четыре угла, *пятиугольникомъ*—многоугольникъ, въ которомъ пять угловъ, и т. д.

Многоугольникъ, обводъ котораго прямою линіею можетъ быть пересѣченъ не болѣе чѣмъ въ двухъ точкахъ, каково бы ни было положеніе этой прямой въ плоскости, называется *выпуклымъ*. Когда не утверждается противоположное, то подъ многоугольникомъ въ начальной геометріи разумѣютъ выпуклый многоугольникъ.

Замѣчаніе. Въ начальной геометріи обыкновенно не изучаются свойства такихъ многоугольниковъ, которыхъ обводъ самъ себя пересѣкаетъ. Когда въ начальной геометріи говорятъ о многоугольникѣ, то при этомъ разумѣютъ только такой, котораго обводъ самъ себя не пересѣкаетъ.

Теорема 67. Во всякомъ многоугольникѣ число сторонъ равно числу его угловъ.

Доказательство. Пусть (черт. 69) данъ пятиугольникъ ABCDE; требуется доказать, что въ немъ пять сторонъ.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что между первою и второю вершинами многоугольника заключена одна сторона, между второю и третьею вершиною—другая сторона, между третьею и четвертою—третья сторона, между четвертою и пятою—четвертая сторона, и, наконецъ, между пятою и первою—пятая сторона. Такое же разсужденіе можетъ быть употреблено для всякаго многоугольника. Стало-быть, число сторонъ многоугольника равно числу его угловъ.

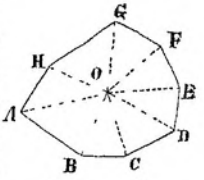


Черт. 69.

Теорема 68. Сумма угловъ многоугольника равняется $2d$, умноженнымъ на число его сторонъ, уменьшенное на двѣ единицы.

Доказательство. Пусть (черт. 70) данъ многоугольникъ ABCDEFGH, въ которомъ n угловъ и n сторонъ; требуется до-

казать, что сумма его угловъ равна $2d.(n-2)$.—Для доказательства этого возьмемъ внутри многоугольника точку O, соединимъ ее со всѣми вершинами даннаго многоугольника; такимъ образомъ мы получимъ n различныхъ треугольниковъ. Сумма угловъ каждаго изъ треугольниковъ равна $2d$; сумма всѣхъ угловъ этихъ треугольниковъ равна $2d.n$; сумма угловъ даннаго многоугольника меньше суммы всѣхъ угловъ этихъ треугольниковъ на сумму послѣдовательныхъ угловъ, образованныхъ при вершинѣ O; эта послѣдняя сумма равна $4d$ (теорема 12). Сталобыть, сумма угловъ многоугольника равняется

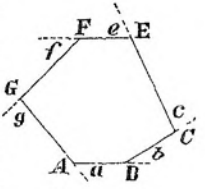


Черт. 70.

$$2d.n - 4d \text{ или } 2d.(n-2).$$

Что и требовалось доказать.

Опредѣленіе. *Внѣшнимъ угломъ многоугольника* называется уголъ, смежный какому-нибудь углу многоугольника. Когда говорятъ о *суммѣ внѣшнихъ угловъ многоугольника*, то предполагаютъ, что у каждой вершины многоугольника образованъ только одинъ внѣшній уголъ, хотя ихъ можетъ быть образовано два. Обыкновенно продолжаютъ всѣ стороны въ одномъ направленіи, а именно отъ правой руки къ лѣвой, считая, что мы находимся внутри многоугольника и обращены лицомъ къ продолжаемой сторонѣ многоугольника. Такимъ образомъ внѣшними углами многоугольника ABCEFG (черт. 71) будутъ углы a, b, c, e, f и g.



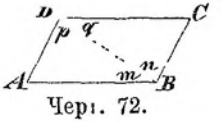
Черт. 71.

Замѣчаніе. Учащемуся предлагается, въ качествѣ полезнаго упражненія, доказать, что сумма внѣшнихъ угловъ всякаго выпуклаго многоугольника, независимо отъ числа его сторонъ, равна $4d$.

Опредѣленія. Прямая, соединяющая вершины двухъ, не прилежащихъ къ одной сторонѣ, угловъ многоугольника, называется *діагональю*. Четыреугольникъ, въ которомъ противолежащія стороны параллельны другъ другу, называется *параллелограммомъ*. Четыреугольникъ, въ которомъ только двѣ противолежащія другъ другу стороны параллельны одна другой, называется *трапеціею*. Параллельныя стороны трапеціи называются ея *основаніями*.

Теорема 69. Противолежащія одна другой стороны параллелограмма равны между собою.

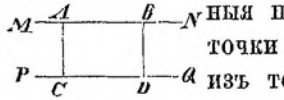
Доказательство. Пусть (черт. 72) данъ параллелограммъ ABCD, т. е. пусть въ четыреугольникѣ ABCD сторона AB параллельна DC и сторона AD параллельна BC; требуется доказать, что AB = DC и AD = BC.—Для доказательства этого проведемъ



Черт. 72.

какую-нибудь діагональ этого параллелограмма, напр., діагональ BD. Получимъ два треугольника, у которыхъ сторона BD общая, $\angle m = \angle q$, $\angle n = \angle p$ (теорема 30); стало-быть, эти два треугольника равны между собою (теорема 52); а въ равныхъ треугольникахъ соотвѣтствующіе элементы равны между собою, т. е. AB = DC и AD = BC. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Если двѣ прямыя параллельны одна другой, то всѣ точки одной изъ нихъ находятся отъ другой на одинаковомъ разстояніи.—Дѣйствительно: если (черт. 73) даны двѣ параллельныя прямыя MN и PQ, то, взявъ какія-нибудь двѣ точки A и B и проведя перпендикуляры AC и BD изъ точекъ A и B къ прямой PQ, получимъ, что эти перпендикуляры параллельны между собою (теорема 14); стало-быть, фигура ABCD есть параллелограммъ, въ которомъ AC = BD.

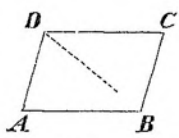


Черт. 73.

Опредѣленія. Перпендикуляръ, проведенный изъ какой-либо точки одной изъ двухъ параллельныхъ прямыхъ къ другой параллельной, называется *разстояніемъ двухъ параллельныхъ линій другъ отъ друга*. Такъ, перпендикуляръ AC или BD есть разстояніе прямой MN отъ прямой PQ. Параллелограммъ, въ которомъ пересѣкающіяся стороны образуютъ прямые углы, называется *прямоугольнымъ параллелограммомъ*, или, короче, *прямоугольникомъ*. Параллелограммъ, въ которомъ какой-нибудь изъ угловъ острый или тупой, называется *косоугольнымъ параллелограммомъ*.

Теорема 70. Во всякомъ параллелограммѣ противолежащіе другъ другу углы равны между собою.

Доказательство. Пусть (черт. 74) четыреугольникъ ABCD есть параллелограммъ; требуется доказать, что $\angle A = \angle C$, а $\angle B = \angle D$. —Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что если это прямоугольникъ, то $\angle A = \angle C$, и $\angle B = \angle D$ (теорема 5); если же $\angle A$ острый, то $\angle B$ и $\angle D$— тупые, а $\angle C$ — тоже острый. Но такъ какъ AB ‖ CD, а AD ‖ BC, то $\angle A = \angle C$, а $\angle B = \angle D$ (теорема 38). Что и требовалось доказать.



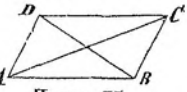
Черт. 74.

Замѣчаніе. Эта теорема можетъ быть доказана, конечно, и на основаніи свойствъ тр-ковъ, образованныхъ послѣ проведенія діагонали (см. черт. 74). Это предлагается учащемуся.

Теорема 71. Діагонали всякаго параллелограмма взаимно пересѣкаются и притомъ внутри параллелограмма.

Доказательство. Пусть (черт. 75) данъ параллелограммъ ABCD; требуется доказать, что діагональ его BD пересѣкается

діагональю AD и притомъ внутри параллелограмма.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что точка C находится внѣ треугольника ABD, но внутри его угла A. Поэтому прямая AC пересѣчетъ прямую BD и притомъ въ точкѣ, находящейся между точками B и D (слѣдствіе 4-е теоремы 1), т. е. внутри параллелограмма ABCD. Что̀ и требовалось доказать.



Черт. 75.

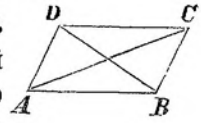
Теорема 72. Діагонали всякаго параллелограмма взаимно дѣлятся пополамъ въ точкѣ ихъ перссѣченія.

Доказательство. Пусть (черт. 76) данъ параллелограммъ ABCD и его діагонали AC и BD; требуется доказать, что онѣ въ точкѣ пересѣченія M раздѣляютъ одна другую пополамъ, т. е. что AM = MC, а DM = MB.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что при этомъ образуется четыре треугольника, изъ которыхъ мы разсмотримъ треугольники ABM и DCM. Въ этихъ двухъ треугольникахъ стороны AB и DC равны между собою (теорема 69), и углы, къ нимъ прилежащіе, порознь тоже равны между собою (теорема 30). Стало-быть, треугольники эти равны между собою (теорема 52); а потому прямая AM = MC, и прямая DM = MB. Что̀ и требовалось доказать.

Черт. 76.

Теорема 73. Въ косоугольномъ параллелограммѣ діагональ, соединяющая вершины острыхъ его угловъ, больше діагонали, соединяющей вершины тупыхъ.

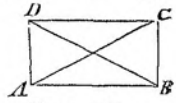
Доказательство. Пусть (черт. 77) фигура ABCD есть косоугольный параллелограммъ, ∠ A острый, а прямыя BD и AC—его діагонали; требуется доказать, что діагональ BD больше діагонали AC.—Для доказательства этого разсмотримъ треугольники DBA и CAB, у которыхъ сторона AB общая, сторона AD = BC, а острый ∠ A, заключенный между AB и AD меньше тупого угла B, заключеннаго между AB и BC.—Стало-быть (теорема 53) діагональ BD больше діагонали AC. Что̀ и требовалось доказать.



Черт. 77.

Теорема 74. Въ прямоугольникѣ діагонали равны между собою.

Доказательство. Пусть (черт. 78) фигура ABCD есть прямоугольникъ; требуется доказать, что діагонали его AC и BD равны между собою.—Для доказательства этого разсмотримъ треугольники DBA и CAB. Это — треугольники прямоугольные, и у нихъ одинъ катетъ общій, а прочіе два катета равны между со-



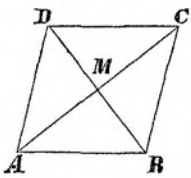
Черт. 78.

бою (теорема 69). Слѣдовательно, △ DBA=△ CAB (слѣдствіе 1-е теоремы 51), а въ равныхъ треугольникахъ соотвѣтствующіе элементы равны между собою, т. е. діагональ AC равна діагонали BD. Что и требовалось доказать.

Опредѣленія. Параллелограммъ, въ которомъ всѣ четыре стороны равны между собою, называется *ромбомъ*. Прямоугольникъ же, у котораго всѣ четыре стороны равны между собою (прямоугольный ромбъ) называется также и *квадратомъ*.

Теорема 75. Во всякомъ ромбѣ діагонали пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.

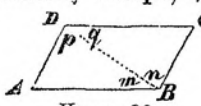
Доказательство. Пусть (черт. 79) четыреугольникъ ABCD есть ромбъ; требуется доказать, что діагонали его взаимно перпендикулярны. — Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что во всякомъ случаѣ (будетъ ли данный ромбъ квадратомъ, или нѣтъ) △ DCB есть треугольникъ равнобедренный, и въ немъ линія MC, соединяющая средину основанія (теорема 72) съ вершиной, должна быть перпендикулярна къ его основанію (слѣдствіе 1-е теоремы 55). Стало-быть, MC перпендикулярна къ DB. Что и требовалось доказать.



Черт. 79.

Лемма 3-я. Если двѣ конечныя прямыя равны и параллельны, то непересѣкающіяся прямыя, соединяющія концы ихъ, тоже равны и параллельны.

Доказательство. Пусть прямая AB равна и параллельна прямой CD; требуется доказать, что прямая AD равна и параллельна прямой BC. — Для доказательства этого проведемъ одну изъ діагоналей, напр., діагональ AD; получимъ два треугольника ABD и ACD, которые (теорема 51) равны между собою, потому что стороны AB и CD равны по условію, AC общая, а заключенные между ними углы тоже между собою равны (теорема 30). Слѣдовательно, AD = BC, а $\angle p = \angle n$, т. е. AC также и параллельна BD (теорема 25). Стало-быть, AC равна и параллельна BD. Что и требовалось доказать.



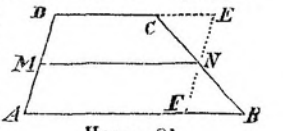
Черт. 80.

Замѣчаніе. Слова: „равна и параллельна“ иногда на письмѣ замѣняются знакомъ ⫽.

Теорема 76. Если непараллельныя стороны трапеціи раздѣлить пополамъ и соединить точки дѣленія прямою линіею, то эта прямая параллельна основаніямъ трапеціи и равна полусуммѣ ихъ.

Доказательство. Пусть (черт. 81) дана трапеція ABCD и пусть точки M и N средины непараллельныхъ сторонъ AD и BC; требуется доказать, что прямая MN параллельна основаніямъ трапеціи и

равна полусуммѣ сторонъ AB и CD.—Для доказательства этого проведемъ черезъ точку N прямую параллельно къ AD и продолжимъ ее до пересѣченія съ основаніемъ AB въ точкѣ F и съ продолженіемъ основанія DC въ точкѣ E; тогда мы получимъ параллелограммъ AFED и равные между собою (теорема 52) треугольники NCE и NBF. Въ этихъ треугольникахъ NE = NF, т. е. EN = $^1/_2$EF; но, по условію, DM = $^1/_2$AD; слѣдовательно (аксіома 11) EN=DM, и поэтому (лемма 3-я) MN ⫽ DE ⫽ AF. Такимъ образомъ доказано, что MN параллельна каждому изъ основаній трапеціи. Теперь остается доказать, что она равна полусуммѣ ихъ. Принявъ во вниманіе, что



Черт. 81.

$$MN = AB - FB$$

и что, кромѣ того,

$$MN = DE + CE,$$

и сложивъ (аксіома 8) обѣ части этихъ равенствъ, мы получимъ, что

$$2MN = AB + DC + CE - FB.$$

Но CE = FB; стало-быть, 2MN = AB + DC, откуда

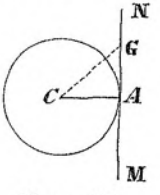
$$MN = \frac{AB + DC}{2}.$$

Стало-быть, прямая MN параллельна основаніямъ трапеціи и равна полусуммѣ ихъ. Что̀ и требовалось доказать.

§ 7. Объ относительномъ положеніи прямой и окружности и объ относительномъ положеніи двухъ окружностей въ плоскости.

Теорема 77. Если изъ конца радіуса провести въ плоскости круга прямую, перпендикулярную къ этому радіусу, то эта прямая имѣетъ съ окружностью круга только одну эту общую точку.

Доказательство. Пусть (черт. 82) дана окружность, центръ которой есть точка C, а радіусъ CA, и пусть черезъ точку A проведена, въ той же плоскости, прямая MN, перпендикулярная къ радіусу CA; требуется доказать, что у этой прямой и окружности есть только одна общая точка A.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что всякая прямая CG, соединяющая любую точку G прямой MN съ центромъ C должна быть больше радіуса CA, такъ какъ CA есть перпендикуляръ, прямая CG—наклонная къ MN, проведенная изъ той же точки (слѣдствіе 1-е теоремы 61). Слѣдовательно, никакая точка G прямой MN



Черт. 82.

ности, т. е., кромѣ точки A, не существуетъ ни одной такой точки, которая бы въ одно и то же время принадлежала и прямой и окружности. Стало-быть, у данной окружности и данной прямой есть только одна общая точка A. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Если изъ конца радіуса провести къ этому радіусу въ той же плоскости перпендикулярную прямую, то всѣ точки этой послѣдней, за исключеніемъ точки, принадлежащей также и окружности, находятся внѣ окружности, а всѣ точки окружности, за исключеніемъ той же точки, лежатъ внѣ прямой. — Дѣйствительно: всякая точка этой прямой, за исключеніемъ общей точки прямой и окружности, есть подножіе наклонной, лежащее *внѣ окружности*, а всякая точка окружности, за исключеніемъ той же общей точки, есть конецъ радіуса, лежащій *внѣ прямой*.

Опредѣленіе. *Касательною* къ данной окружности называется безконечная прямая, имѣющая съ нею только одну общую точку. Общая точка окружности и прямой, къ ней касательной, называется *точкою касанія* (или соприкосновенія) прямой и окружности; окружность, которой данная прямая касается въ нѣкоторой точкѣ, называется окружностью, *касательною къ этой прямой*.

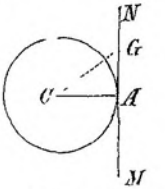
Теорема 78. Всѣ точки окружности, касательной къ данной прямой, за исключеніемъ точки касанія, лежащей на этой прямой, находятся по ту же сторону прямой, гдѣ лежитъ центръ окружности.

Доказательство. Пусть (черт. 83) окружность C касается прямой MN въ точкѣ A; требуется доказать, что всѣ точки окружности, лежатъ по ту же сторону прямой, гдѣ лежитъ центръ окружности.—Для доказательства этого предположимъ, что нѣкоторая точка окружности находится въ точкѣ B, по другую сторону прямой. Тогда прямая CB была бы однимъ изъ радіусовъ данной окружности и должна была бы равняться CA но $CD > CA$, стало-быть, и подавно $CB > CA$, т. е. одинъ изъ радіусовъ окружности болѣе другого ея радіуса, чего быть не можетъ. Стало-быть, всѣ точки окружности, касательной къ данной прямой, за исключеніемъ точки касанія, лежащей на этой прямой, находятся по ту же сторону прямой, гдѣ лежитъ центръ окружности. Что и требовалось доказать.

Черт. 83.

Теорема 79 (обратная теоремѣ 77). Если данная прямая есть касательная къ данной окружности, то эта прямая перпендикулярна къ радіусу, проведенному чрезъ точку ихъ касанія.

Доказательство. Пусть (черт. 84) прямая MN есть касательная къ окружности даннаго радіуса и пусть точка A—точка ихъ касанія; требуется доказать, что касательная прямая MN перпендикулярна къ радіусу CA, проведенному чрезъ точку касанія.—Для доказательства этого предположимъ, что прямая CA къ прямой MN не перпендикулярна, а наклонна; въ такомъ случаѣ какая-нибудь другая прямая CG должна быть перпендикулярна къ прямой MN. Но точка G лежитъ внѣ окружности, такъ какъ прямая MN есть касательная къ окружности (теорема 78); въ такомъ случаѣ CG больше радіуса CA, т. е. перпендикуляръ больше наклонной, чего быть не можетъ. Слѣдовательно, невозможно также, чтобы прямая CG была перпендикулярна къ касательной MN, а радіусъ CA къ ней не перпендикуляренъ. Стало-быть, радіусъ CA перпендикуляренъ къ касательной MN, проведенной чрезъ конецъ его, а касательная MN, въ свою очередь, перпендикулярна къ радіусу CA, проведенному чрезъ точку касанія. Что́ и требовалось доказать.



Черт. 84.

Слѣдствіе. Изъ точки, взятой на окружности, къ этой окружности въ той же плоскости можно провести только одну къ ней касательную прямую.—Дѣйствительно: если бы можно было провести двѣ касательныя прямыя, то получилось бы, что изъ точки, взятой на прямой, къ этой прямой въ одной плоскости можно провести два перпендикуляра. Чего быть не можетъ (теорема 7).

Замѣчаніе. Если чрезъ точку касанія данной прямой съ окружностью провести діаметръ этой окружности, то онъ перпендикуляренъ къ данной касательной (теорема 79). Всѣ теоремы, обратныя настоящему предложенію, тоже справедливы, въ чемъ учащемуся предоставляется убѣдиться. Особенно важна слѣдующая:

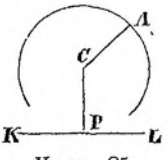
Теорема 80. Если изъ точки соприкосновенія данной прямой и данной окружности провести въ той же плоскости перпендикуляръ къ этой прямой, то этотъ перпендикуляръ пройдетъ чрезъ центръ окружности.

Доказательство можетъ быть повсдено способомъ отъ противоположнаго и предоставляется учащемуся.

Теорема 81. Если перпендикуляръ, проведенный изъ центра данной окружности къ нѣкоторой безконечной прямой, находящейся въ той же плоскости, равенъ радіусу этой окружности, то эта прямая есть касательная къ данной окружности.

Доказательство. Пусть (черт. 85) перпендикуляръ CP проведенный изъ центра C нѣкоторой окружности къ нѣкоторой прямой KL,

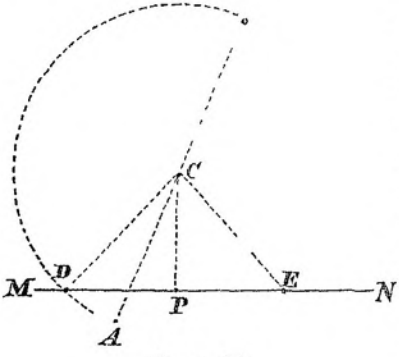
равенъ радіусу CA этой окружности; требуется доказать, что эта прямая есть касательная къ данной окружности.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что окружность эта пройдетъ чрезъ точку P прямой KL; а потому (теорема 33) прямая KL имѣетъ съ окружностью только одну общую точку P, т. е. есть касательная къ ней. Что̀ и требовалось доказать.



Черт. 85.

Лемма 4-ая. Если центръ и нѣкоторая точка окружности лежатъ по разныя стороны какой либо безконечной прямой, находящейся въ той же плоскости, то окружность пересѣкается прямою въ двухъ, и притомъ только въ двухъ точкахъ.

Доказательство. Пусть (черт. 86) центръ C и точка A окружности C лежатъ по разныя стороны безконечной прямой MN; требуется доказать, что у этой прямой и окружности двѣ, и притомъ только двѣ общія точки.—Для доказательства этого возьмемъ по ту же сторону прямой MN, гдѣ лежитъ центръ C, еще одну точку B, отстоящую отъ C на разстояніи равномъ прямой CA и лежащую на продолженіи прямой AC. Тогда точка B должна лежать на окружности, проведенной изъ центра C радіусомъ CA, а на основаніи допущенія 4-го о прямой линіи, окружность эта должна пересѣчь прямую MN, по крайней мѣрѣ, въ одной точкѣ; пусть точка D — одна изъ точекъ пересѣченія; проведемъ прямую CD; эта прямая не перпендикулярна къ MN, ибо, въ противномъ случаѣ, MN была бы касательною и всѣ точки окружности лежали бы по отношенію къ центру по ту сторону прямой MN; что̀ противорѣчитъ положенію точки B. Слѣдовательно, *прямая CD наклонна къ MN*; *проведя перпендикуляръ* CP и отложивъ по другую сторону точки P на прямой MN прямую PE, равную PD, мы получимъ точку E, чрезъ которую тоже должна пройти окружность, ибо тогда CE = CD (слѣдствіе теоремы 57). Такимъ образомъ доказано, что прямая MN и окружность имѣютъ двѣ общія точки; что такихъ точекъ только двѣ — извѣстно изъ теоремы 64 й. Стало-быть, если центръ и нѣкоторая точка окружности лежатъ по разныя стороны какой-либо безконечной прямой, находящейся въ той же плоскости, то

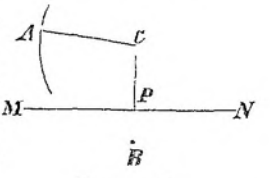


Черт. 86.

окружность пересѣкается этою прямою въ двухъ, и притомъ только въ двухъ точкахъ. Что и требовалось доказать.

Теорема 82. Если перпендикуляръ, проведенный изъ центра данной окружности къ безконечной прямой, находящейся въ той же плоскости, менѣе радіуса, то окружность пересѣкается прямою въ двухъ и только въ двухъ точкахъ.

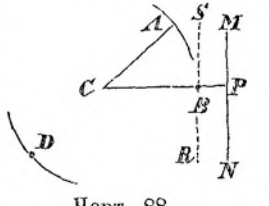
Доказательство. Пусть (черт. 87) перпендикуляръ CP, проведенный изъ центра C нѣкоторой окружности къ прямой MN, находящейся въ той же плоскости, менѣе радіуса CA этой окружности; требуется доказать, что эта прямая и окружность имѣютъ двѣ, и притомъ только двѣ общія точки.— Для доказательства этого продолжимъ перпендикуляръ CP до нѣкоторой точки B, лежащей по другую сторону прямой MN, съ тѣмъ чтобы прямая CB равнялась радіусу CA. Тогда получимъ, что эта окружность пройдетъ чрезъ точку B, при чемъ центръ лежитъ по одну, а точка B по другую сторону прямой MN. Поэтому (лемма 4) прямая MN пересѣкаетъ окружность въ двухъ, и притомъ только въ двухъ точкахъ. Стало-быть, если перпендикуляръ, проведенный изъ центра къ прямой, находящейся въ той же плоскости, менѣе радіуса, то прямая пересѣкаетъ окружность въ двухъ, и притомъ только въ двухъ точкахъ. Что и требовалось доказать.



Черт. 87.

Теорема 83. Если перпендикуляръ, проведенный изъ центра окружности къ данной безконечной прямой, находящейся въ той же плоскости, болѣе радіуса, то всѣ безъ исключенія точки окружности лежатъ внѣ этой прямой.

Доказательство. Пусть (черт. 88) перпендикуляръ CP, проведенный изъ центра окружности къ прямой MN, болѣе радіуса CA; требуется доказать, что всѣ точки окружности лежатъ внѣ прямой MN.— Для доказательства этого отложимъ на прямой CP отъ точки C по направленію къ точкѣ P прямую CB, равную радіусу CA. Точка B этой окружности въ этомъ случаѣ лежитъ внѣ прямой MN. Кромѣ того проведемъ чрезъ точку B прямую RS, касательную къ окружности; она будетъ параллельна прямой MN (теорема 79), и всѣ точки окружности, кромѣ точки B, лежатъ внѣ прямой RS. Всѣ точки окружности, за исключеніемъ точки B, и всѣ точки прямой MN лежатъ по разныя стороны прямой RS. Стало-быть, не только точка B, но и подавно всѣ осталь-



Черт. 88.

ныя точки окружности C лежатъ внѣ прямой MN. Что и требовалось доказать.

Теорема 84 (обратная теоремѣ 81). *Если данная прямая есть* касательная къ данной окружности, то разстояніе центра окружности отъ данной прямой равно радіусу окружности.

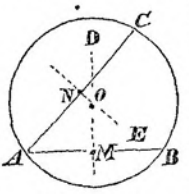
Теорема 85 (*обратная теоремѣ* 82). Если данная прямая пересѣкаетъ окружность, то разстояніе центра окружности отъ данной прямой менѣе радіуса окружности.

Теорема 86 (обратная теоремѣ 83). Если всѣ точки данной прямой лежатъ внѣ данной окружности, то разстояніе центра окружности отъ данной прямой болѣе радіуса окружности.

Доказательство этихъ трехъ теоремъ предоставляется учащемуся.

Лемма 5-ая. Чрезъ три точки, не лежащія на одной прямой, можно провести окружность.

Доказательство. Пусть (черт. 89) три точки A, B и C не лежатъ на одной прямой; требуется доказать, что чрезъ нихъ можно провести окружность, т. е. что существуетъ нѣкоторая точка O, находящаяся въ одинаковомъ разстояніи отъ точекъ A, B и C.—Для доказательства этого соединимъ точку A съ точками B и C. Представимъ себѣ, что точки M и N суть середины конечныхъ прямыхъ AB и AC; проведемъ изъ точки M прямую MD перпендикулярно къ AB, и получимъ, что на прямой MD лежатъ всѣ безъ исключенія точки, находящіяся на равномъ разстояніи отъ точекъ A и B (теорема 65). Слѣдовательно, если существуетъ такая точка, которая находится на одинаковомъ разстояніи отъ всѣхъ трехъ точекъ A, B и C, то эта точка должна лежать на прямой MD. Далѣе, проведемъ изъ точки N прямую перпендикулярно къ AC и получимъ, что на прямой NE лежатъ всѣ, безъ исключенія, точки, находящіяся на равномъ разстояніи отъ точки A и C (теорема 65). Слѣдовательно, если существуетъ такая точка, которая находится на одинаковомъ разстояніи отъ всѣхъ трехъ точекъ A, B и C, то эта точка должна находиться также и на прямой NE. Такимъ образомъ, если такая точка существуетъ, то она должна лежать въ одно и то же время на двухъ прямыхъ, т. е. лежитъ въ точкѣ ихъ пересѣченія (слѣдствіе 3 теоремы 1-й). Но эти два перпендикуляра MD и NE пересѣкаются въ нѣкоторой точкѣ O (теорема 40), которая, слѣдовательно, находится въ равномъ разстояніи отъ всѣхъ трехъ точекъ A, B и C. Слѣдовательно, существуетъ такая точка O, которая находится на рав-



Черт. 89.

номъ разстояніи отъ трехъ точекъ A, B и C, не лежащихъ на одной прямой, т. е. мы можемъ, принявъ точку O за центръ, а OB за радіусъ, провести окружность, и эта окружность пройдетъ чрезъ всѣ три точки A, B и C. Стало-быть, чрезъ три точки, не лежащія на одной прямой, можно провести окружность.

Слѣдствіе. Чрезъ три точки, не лежащія на одной прямой, можно провести только одну окружность. — Дѣйствительно: мы нашли, что центръ окружности, которую можно провести чрезъ три точки, не лежащія на одной прямой, совпадаетъ съ пересѣченіемъ нѣкоторыхъ двухъ прямыхъ линій; но точкою пересѣченія двухъ прямыхъ можетъ быть только одна точка (слѣдствіе 2-е теоремы 1-й); стало-быть, найденный нами центръ можетъ быть только одинъ, а за радіусъ можетъ быть принята только одна конечная прямая. Стало-быть, чрезъ три точки можетъ быть проведена только одна окружность.

Замѣчаніе. Учащемуся предлагается, въ качествѣ полезнаго упражненія, изслѣдовать съ той же точки зрѣнія—почему чрезъ три точки, лежащія на одной прямой, нельзя провести окружность опредѣленнаго радіуса (ср. слѣдствіе теоремы 64).

Опредѣленія. Конечная прямая, соединяющая центры двухъ круговъ, лежащихъ въ одной плоскости, называется *линіею центровъ* этихъ круговъ или линіею центровъ ихъ окружностей. Если у двухъ окружностей, находящихся въ одной плоскости, центры совпадаютъ, то длина линіи центровъ считается равною нулю, а окружности называются *концентрическими*.

Теорема 87. Если двѣ окружности, находясь въ одной плоскости, лежатъ каждая внѣ другой, такъ что у нихъ нѣтъ ни одной общей точки, то линія ихъ центровъ болѣе суммы радіусовъ этихъ окружностей.

Доказательство. Пусть (черт. 90) окружности O и O_1, которыхъ радіусы R и r, находятся каждая внѣ другой, притомъ такъ, что у нихъ нѣтъ ни одной общей точки; требуется доказать, что $OO_1 > R + r$.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что въ этомъ случаѣ точки A и A_1 лежатъ между точками O и O_1, притомъ такъ, что точка A_1 лежитъ внѣ окружности O, точка A— внѣ окружности O_1. Слѣдовательно:

$$OO_1 = OA + AA_1 + A_1O_1,$$

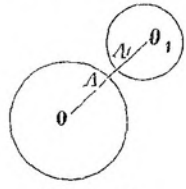
т. е.

$$OO_1 = R + AA_1 + r = R + r + AA_1,$$

откуда

$$OO_1 > R + r.$$

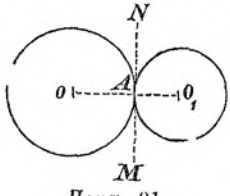
Что и требовалось доказать.



Черт. 90.

Теорема 88. Если продолжить радіусъ окружности за предѣлы ея и принять какую-либо точку его продолженія за центръ, а разстояніе между этой точкою и концомъ даннаго радіуса за радіусъ новой окружности, то конецъ даннаго радіуса есть единственная общая точка обѣихъ окружностей.

Доказательство. Пусть (черт. 91) радіусъ OA окружности O продолженъ до точки O_1 и пусть конечная прямая O_1A принята за радіусъ новой окружности; требуется доказать, что точка A есть единственная общая точка обѣихъ окружностей O и O_1. — Для доказательства этого изъ точки A проведемъ перпендикуляръ AN, который будетъ касательною къ обѣимъ окружностямъ (теорема 77); всѣ точки окружности O, за исключеніемъ точки A, лежатъ внѣ прямой AN по одну ея сторону, а всѣ точки окружности O_1, за исключеніемъ той же точки A, лежатъ внѣ прямой AN по другую ея сторону; а потому не существуетъ еще одной точки окружности O, которая въ то же время принадлежала-бы окружности O_1 и, обратно, не существуетъ ни одной точки окружности O_1, которая принадлежала бы также и окружности O. Стало-быть, у данныхъ окружностей только *одна общая точка* A. Что и требовалось доказать.



Черт. 91.

Опредѣленія. Если двѣ окружности имѣютъ только одну общую точку, а всѣ остальныя точки каждой изъ нихъ лежатъ внѣ другой окружности, то эта общая точка называется *точкою ихъ внѣшняго касанія* (или *соприкосновенія*), а окружности называются *касательными съ внѣшнимъ касаніемъ*.

Замѣчаніе. Теорема 88 доказываетъ, что касательныя съ внѣшнимъ касаніемъ окружности существуютъ. Вообще: прежде чѣмъ устанавливать какое нибудь опредѣленіе, надобно убѣдиться въ существованіи того, что мы опредѣляемъ. Выше было принято, что прямая линія и плоскость не подлежатъ опредѣленіямъ (Введеніе, VIII). Теоремы же 6, 14, 43, 45, 59, 77 и другія служатъ для доказательства существованія тѣхъ фигуръ, которыя послѣ нихъ опредѣляются.

Лемма 6-ая. Если взять точку, не совпадающую съ центромъ, на діаметрѣ окружности, то меньшая часть діаметра менѣе, а бо́льшая часть діаметра болѣе конечной прямой, соединяющей эту точку съ любою точкою той же окружности.

Доказательство. Пусть (черт. 92) дана окружность O и точка A, не совпадающая съ центромъ, на діаметрѣ BC; требуется доказать, что $AD > AC$ и что $AB > AD$. — Для доказательства этого

соединимъ центръ O съ точкою D; получимъ $\triangle$ AOD, въ которомъ (теорема 44) $AO + AD > OD$, откуда (аксіома 5)

$$AO + AD > OC, \text{ или } AO + AD > AO + AC,$$

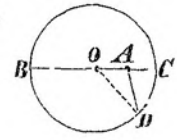
т. е. (аксіома 8) $AD > AC$. — Для доказательства второй половины теоремы разсмотримъ тотъ же $\triangle$ AOD, въ которомъ

$$AO + OD > AD,$$

откуда (аксіома 5)

$$AO + OB > AD, \text{ т. е. } AB > AD.$$

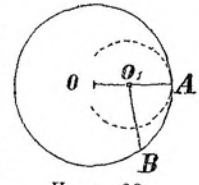
Стало-быть, $AD > AC$ и $AB > AD$. Что и требовалось доказать.



Черт. 92.

Теорема 89. Если принять какую-либо точку діаметра окружности за центръ, а меньшую часть діаметра за радіусъ новой окружности, то конецъ этого радіуса есть единственная общая точка обѣихъ окружностей.

Доказательство. Пусть на радіусѣ OA взята точка O_1 и пусть она принята за центръ, а прямая O_1A за радіусъ новой окружности; требуется доказать, что точка A есть единственная общая точка обѣихъ окружностей. — Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что (лемма 6-ая) $O_1A < O_1B$, и что вообще всѣ точки окружности O_1, за исключеніемъ точки A, находящейся на окружности O, находятся внутри окружности O. Стало-быть, обѣ окружности имѣютъ одну, и притомъ только одну общую точку. Что и требовалось доказать.



Черт. 93.

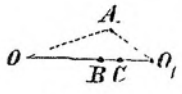
Опредѣленіе. Если у двухъ окружностей только одна общая точка и всѣ остальныя точки одной изъ нихъ, за исключеніемъ этой общей точки, лежатъ внутри другой окружности, то эта общая точка называется *точкою ихъ внутренняго касанія*, а окружности— *окружностями съ внутреннимъ касаніемъ*.

Замѣчаніе 1-ое. Теорема 89 доказываетъ, что касательныя съ внутреннимъ касаніемъ окружности существуютъ.

Замѣчаніе 2-ое. Учащемуся предоставляется, въ качествѣ весьма полезнаго упражненія, разсмотрѣть случай, когда за радіусъ принята бо́льшая часть діаметра, а равно случай—когда за центръ принята точка на продолженіи діаметра, а за радіусъ — разстояніе этой точки до начала діаметра. Въ этихъ случаяхъ окружности имѣютъ тоже внутреннее касаніе.

Теорема 90. Если двѣ окружности имѣютъ внѣшнее касаніе, то точка касанія лежитъ на линіи центровъ, и притомъ между центрами данныхъ окружности.

Доказательство. Пусть двѣ окружности O и O_1 имѣютъ внѣшнее касаніе въ точкѣ A; требуется доказать, что центры ихъ O и O_1 и точка касанія лежатъ на одной прямой.—Для доказательства этого предположимъ, что точка касанія A (черт. 94) лежитъ внѣ линіи центровъ; тогда линія центровъ пересѣчетъ окружности въ двухъ точкахъ B и C, изъ которыхъ первая должна лежать внѣ окружности O_1, а вторая — внѣ окружности O; а потому линія центровъ должна была бы состоять изъ трехъ частей, изъ которыхъ двѣ, OB и O_1C, порознь равны радіусамъ данныхъ окружностей, а третья представляетъ собою разстояніе между концами этихъ радіусовъ. Тогда сторона, равная линіи центровъ $OBCO_1$, треугольника, котораго остальныя стороны равны OA и O_1A, больше суммы остальныхъ сторонъ треугольника. Чего быть не можетъ (теорема 44). Слѣдовательно, точка касанія не можетъ лежать внѣ линіи центровъ. Но она не можетъ лежать также на продолженіи этой линіи, потому что окружности имѣютъ внѣшнее касаніе. Стало-быть, точка касанія двухъ окружностей съ внѣшнимъ касаніемъ лежитъ на линіи центровъ, и притомъ между центрами окружностей. Что и требовалось доказать.



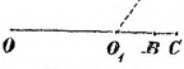
Черт. 94.

Слѣдствіе 1-ое. Если двѣ окружности имѣютъ внѣшнее касаніе, то линія центровъ равна суммѣ радіусовъ.—Дѣйствительно: по предыдущей теоремѣ, точка касанія A лежитъ между центрами O и O_1. Стало-быть, $OO_1 = OA + O_1A$.

Слѣдствіе 2-ое. Если двѣ окружности имѣютъ внѣшнее касаніе, то прямая, касательная къ одной изъ нихъ въ точкѣ касанія обѣихъ окружностей, есть касательная также и къ другой окружности.—Дѣйствительно: эта прямая перпендикулярна къ радіусамъ обѣихъ окружностей, проходящимъ чрезъ точку касанія.

Теорема 91. Если двѣ окружности имѣютъ внутреннее касаніе, то точка касанія лежитъ на продолженіи линіи центровъ.

Доказательство. Пусть окружности O и O_1 имѣютъ внутреннее касаніе въ точкѣ A; требуется доказать, что точка касанія лежитъ на продолженіи линіи центровъ.—Для доказательства этого предположимъ, что точка A (черт. 95) лежитъ внѣ ея продолженія. Тогда мы получили бы, что линія центровъ пересѣчетъ внутреннюю окружность въ точкѣ B, а внѣшнюю—въ точкѣ C; но $O_1A > O_1B$ (лемма 6-ая), т. е. одинъ радіусъ окружности больше другого радіуса той же окружности, чего быть не можетъ. Слѣдовательно, точка касанія не можетъ лежать внѣ продолженія



Черт. 95.

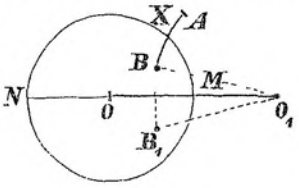
линіи центровъ; но она не можетъ также лежать и на самой линіи центровъ, потому что это окружности съ касаніемъ внутреннимъ. Стало-быть, точка касанія лежитъ на продолженіи линіи центровъ Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1-ое. Если двѣ окружности имѣютъ внутреннее касаніе, то линія центровъ равна разности ихъ радіусовъ.—Дѣйствительно: въ этомъ случаѣ $OO_1 = R - R_1$.

Слѣдствіе 2-ое. Если двѣ окружности имѣютъ внутреннее касаніе, то прямая, касательная къ одной изъ нихъ въ точкѣ касанія обѣихъ окружностей, есть касательная также и къ другой окружности.—Дѣйствительно: эта прямая перпендикулярна къ радіусамъ обѣихъ окружностей, проходящимъ чрезъ точку касанія.

Теорема 92. Если дана окружность и если нѣкоторая другая окружность проходитъ чрезъ точку, лежащую внѣ первой окружности, и чрезъ точку, лежащую внутри ея, то вторая окружность пересѣкаетъ линію центровъ или ея продолженіе въ точкѣ, несовпадающей ни съ одной изъ точекъ пересѣченія первой окружности съ безконечно продолженной линіей центровъ.

Доказательство. Пусть (черт. 96) дана окружность O и пусть другая окружность, которой центръ точка O_1, проходитъ чрезъ двѣ точки A и B, изъ которыхъ первая лежитъ внѣ, а вторая—внутри окружности O; требуется доказать, что окружность O_1 не пересѣчетъ линіи центровъ и ея продолженія ни въ точкѣ M, ни въ точкѣ N.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что если бы точка B лежала на линіи центровъ или ея продолженіи, то теорема доказана; ибо она въ этомъ случаѣ не могла бы, по условію, совпасть ни съ точкою M, ни съ точкою N; если же точка B лежитъ внѣ линіи центровъ, то опустимъ изъ нея перпендикуляръ на прямую OO_1 и отъ точки P отложимъ на его продолженіи прямую PB_1, равную прямой PB. Соединивъ точку O_1 съ точками B и B_1, получимъ (слѣдствіе теоремы 57), что $O_1B = O_1B_1$, т. е. что точка B_1 тоже лежитъ на окружности O_1; а потому эта окружность должна пересѣчь линію центровъ или ея продолженіе (допущеніе 4-ое относительно прямой); но это пересѣченіе не можетъ совпасть ни съ точкою M (ибо въ этомъ случаѣ мы имѣли бы двѣ окружности съ внѣшнимъ касаніемъ, что противорѣчитъ условію и теоремѣ 88), ни съ точкою N (ибо въ этомъ случаѣ мы имѣли бы двѣ окружности съ внутреннимъ касаніемъ, что тоже противорѣчитъ условію и теоремѣ 89). Стало-



Черт 96.

быть, точка пересѣченія окружности съ линіею центровъ или ея продолженіемъ не совпадаетъ ни съ точкою M, ни съ точкою N. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Точка пересѣченія двухъ пересѣкающихся окружностей лежитъ внѣ линіи центровъ и ея продолженій.—Дѣйствительно: если бы мы предположили, что точка пересѣченія двухъ пересѣкающихся окружностей лежитъ на линіи центровъ, то это значило бы, что вторая окружность пересѣкаетъ линію центровъ въ той же точкѣ, въ которой ее пересѣкаетъ первая окружность. Чего быть не можетъ (теоремы 88 и 89).

Теорема 93. Если двѣ окружности пересѣкаются, то у нихъ двѣ, и притомъ только двѣ точки пересѣченія.

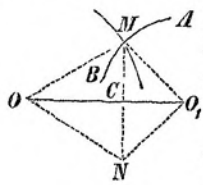
Доказательство. Пусть (черт. 97) окружность O пересѣчена другою окружностью, которой центръ находится въ точкѣ O_1 (на черт. 97 окружности не выполнены), въ нѣкоторой точкѣ M; требуется доказать, что эти двѣ окружности пересѣкаются еще въ одной точкѣ.—Для доказательства этого изъ точки M, лежащей внѣ линіи центровъ (слѣдствіе теоремы 92), къ линіи центровъ проведемъ перпендикуляръ MC, продолжимъ его, на продолженіи отложимъ прямую NC, равную MC, и соединимъ точки M и N съ центрами O и O_1. Увидимъ, что

$$OM = ON \text{ (слѣдствіе теоремы 57),}$$

а также

$$O_1M = O_1N \text{ (по той же причинѣ).}$$

Это значитъ, что точка N принадлежитъ обѣимъ окружностямъ. Стало-быть, данныя окружности пересѣкаются въ двухъ точкахъ. Но такихъ общихъ точекъ у данныхъ окружностей можетъ быть только двѣ, ибо если бы ихъ было болѣе, то окружности совмѣстились бы (слѣдствіе леммы 3-ой). Стало-быть, если двѣ окружности пересѣкаются, то у нихъ двѣ, и притомъ только двѣ точки пересѣченія. Что и требовалось доказать.



Черт. 97.

Теорема 94. Если двѣ окружности пересѣкаются, то линія ихъ центровъ меньше суммы радіусовъ этихъ окружностей и больше ихъ разности.

Доказательство. Пусть (выполненіе чертежа предоставляется учащемуся) двѣ окружности, которыхъ центры O и O_1, а радіусы R и R_1, пересѣкаются; требуется доказать, что линія центровъ

$$OO_1 < R + R_1 \text{ и } OO_1 > R - R_1.$$

Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что каждая изъ

общихъ точекъ этихъ окружностей лежитъ внѣ линіи центровъ и ея продолженій (слѣдствіе теоремы 92); стало-быть,

$$OO_1 < R + R_1 \text{ и } OO_1 > R - R_1 \text{ (теорема 44).}$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 95. Если всѣ безъ исключенія точки одной окружности лежатъ внутри другой окружности, то разность ихъ радіусовъ болѣе линіи центровъ.

Доказательство. Пусть (черт. 98) всѣ точки окружности O_1 находятся внутри окружности O; требуется доказать, что $OO_1 < R - R_1$.— Для доказательства этого продолжимъ OO_1 до пересѣченія съ окружностями въ точкахъ A и B; тогда

$$OO_1 + R_1 + AB = R,$$

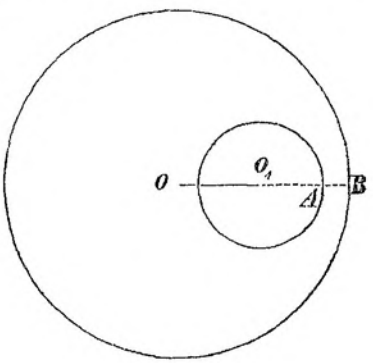
откуда

$$OO_1 + AB = R - R_1;$$

стало-быть,

$$OO_1 < R - R_1.$$

Что и требовалось доказать.



Черт. 98.

Теорема 96 (обратная теоремѣ 87). Если линія центровъ двухъ окружностей, находящихся въ одной плоскости, болѣе суммы ихъ радіусовъ, то окружности не имѣютъ ни одной общей точки и лежатъ одна внѣ другой.

Теорема 97 (обратная теоремѣ 95). Если линія центровъ двухъ окружностей, находящихся въ одной плоскости, менѣе разности ихъ радіусовъ, то окружности не имѣютъ ни одной общей точки и одна изъ нихъ лежитъ внутри другой.

Теорема 98 (обратная теоремѣ 94). Если линія центровъ двухъ окружностей, находящихся въ одной плоскости, менѣе суммы и болѣе разности радіусовъ, то окружности пересѣкаются.

Теорема 99 (обратная теоремѣ 90). Если линія центровъ двухъ окружностей, находящихся въ одной плоскости, равна суммѣ ихъ радіусовъ, то окружности имѣютъ внѣшнее касаніе.

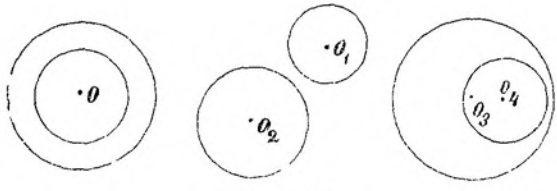
Теорема 100 (обратная теоремѣ 91). Если линія центровъ двухъ окружностей, находящихся въ одной плоскости, равна разности ихъ радіусовъ, то окружности имѣютъ внутреннее касаніе.

Доказательство этихъ пяти теоремъ можетъ быть поведено способомъ приведенія къ нелѣпости и предоставляется учащемуся. Впрочемъ, послѣднія двѣ теоремы выше (теоремы 88 и 89) доказаны, хотя и въ иной формулировкѣ, независимо отъ прямыхъ теоремъ

(87, 90, 91, 94 и 95). Это сдѣлано для того, чтобы было возможно установленіе понятія о касательныхъ окружностяхъ.

Замѣчаніе 1-ое. Двѣ окружности, находящіяся въ одной и той же плоскости, могутъ, слѣдственно, лежать одна относительно другой такъ, что

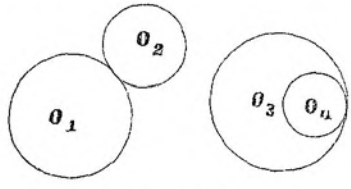
1) всѣ точки каждой изъ нихъ лежатъ внѣ другой (черт. 99, O_1 и O_2);



Черт. 99.

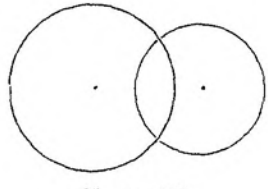
2) всѣ точки одной изъ нихъ внутри другой (черт. 99, окружности съ общимъ центромъ O, и окружности O_3 и O_4);

3) окружности имѣютъ внѣшнее касаніе (черт. 100, O_1 и O_2);



Черт. 100.

4) окружности имѣютъ внутреннее касаніе (черт. 100, O_1, O_2);



Черт. 101.

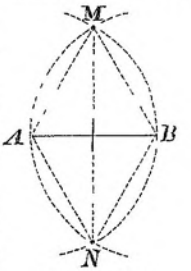
5) окружности перссѣкаются (черт. 101).

Замѣчаніе 2-ое. Изъ всѣхъ теоремъ этого параграфа особенное значеніе для слѣдующаго имѣетъ теорема 98, а также лемма 4-ая. Но такъ какъ въ нихъ мы имѣемъ дѣло съ теоремами весьма очевидными; то ихъ не принято излагать ранѣе рѣшенія задачъ § 8.

§ 8. Задачи, относящіяся къ предыдущимъ статьямъ.

Задача 5. Раздѣлить конечную прямую AB пополамъ (черт. 102).

Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи примемъ точку A за центръ, а линію AB—за радіусъ и опишемъ этимъ радіусомъ изъ центра A окружность; потомъ примемъ точку B за центръ, а линію BA—за радіусъ и опишемъ этимъ радіусомъ изъ центра B другую окружность. Эти окружности пересѣкутся (теорема 98). Пусть точки ихъ пересѣченія суть точки M и N. Соединимъ точки M и N прямою MN; эта прямая пересѣчетъ прямую AB (допущеніе 4-ое относительно плоскости) въ нѣкоторой единственной точкѣ C (слѣдствіе 4-ое теоремы 1).

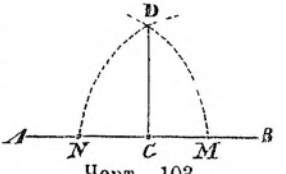


Черт. 102.

Точка C и есть средина прямой AB, такъ что AC = CB.— Для того, чтобы убѣдиться въ этомъ, соединимъ точку A съ точками M и N, а также точку B съ тѣми же точками M и N. Получимъ треугольники AMN и BMN, которые равны между собою (почему?). Въ этихъ треугольникахъ $\angle AMC = \angle BMC$ (почему?). Теперь обратимся къ треугольникамъ AMC и BMC. Эти треугольники тоже равны между собою (почему?), и въ нихъ противъ равныхъ угловъ AMC и BMC лежатъ стороны AC и CB, которыя равны между собою. Въ чемъ и надлежало убѣдиться.

Задача 6. Изъ точки C, взятой на безконечной прямой AB, провести къ этой прямой перпендикуляръ (черт. 103) или, что одно и то-же, раздѣлить выпрямленный уголъ пополамъ.

Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи отъ точки C на CB отложимъ произвольную конечную прямую CM и равную ей конечную прямую CN—отъ точки C въ противоположномъ направленіи CA. Примемъ затѣмъ точку M за центръ, а прямую MN за радіусъ, опишемъ надъ прямой AB нѣкоторую часть окружности; тѣмъ же радіусомъ, принявъ точку N за центръ, опишемъ часть окружности по ту же сторону прямой AB. Эти окружности пересѣкутся (теорема 98); пусть точка ихъ пересѣченія, лежащая надъ прямой AB, будетъ точка D. Соединимъ точки D и C прямою.



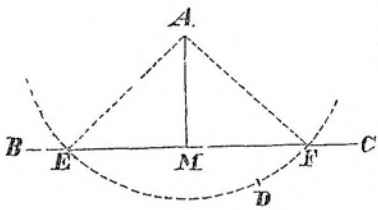
Черт. 103.

Прямая CD и есть искомый перпендикуляръ.—Для того, чтобы убѣдиться въ этомъ, соединимъ точки M и N съ точкою D. По-

лучимъ треугольники MCD и NCD, которые равны между собою (почему?), и въ нихъ противъ равныхъ сторонъ MD и ND лежатъ углы MCD и NCD, которые должны быть прямые (почему?). А въ такомъ случаѣ CD ⊥ AB. Въ чемъ и надлежало убѣдиться.

Задача 7. Изъ данной точки A, взятой внѣ безконечной прямой BC, провести къ ней перпендикуляръ (черт. 104).

Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи возьмемъ какую-нибудь точку D, находящуюся по другую сторону прямой BC, примемъ точку A за центръ и радіусомъ, равнымъ прямой AD, опишемъ окружность. Эта окружность пересѣчетъ прямую BC (лемма 4-ая). Пусть точки пересѣченія окружности съ прямою суть точки E и F. Раздѣливъ конечную прямую EF пополамъ въ точкѣ M (задача 5), соединимъ точку A съ точкою M.

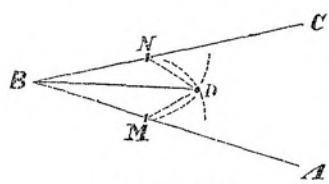


Черт. 104.

Прямая AM и есть искомый перпендикуляръ.—Для того чтобы въ этомъ убѣдиться, соединимъ точку A съ точками E и F. Получимъ треугольники EMA и FMA, которые равны между собою (почему?), и въ нихъ противъ равныхъ сторонъ EA и FA лежатъ равные углы EMA и FMA, которые должны быть прямыми углами (почему?). А въ такомъ случаѣ AM ⊥ CD. Въ чемъ и надлежало убѣдиться.

Задача 8 Данный уголъ ABC раздѣлить пополамъ (черт. 105).

Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи отложимъ на сторонахъ угла ABC, считая отъ вершины его, двѣ равныя между собою конечныя прямыя BM и BN и принявъ точку M за центръ, радіусомъ MN проведемъ часть окружности по другую сторону прямой MN; потомъ, принявъ точку N за центръ, проведемъ часть другой окружности, но тѣмъ же радіусомъ. Эти окружности пересѣкутся (теорема 98). Пусть точка ихъ пересѣченія будетъ точка D. Соединимъ вершину угла B съ точкою D.

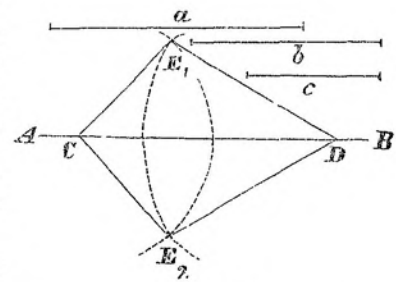


Черт. 105.

Прямая BD и есть равнодѣлящая угла ABC.—Для того, чтобы въ этомъ убѣдиться, соединимъ точку D съ точками M и N. Получимъ треугольники BMD и BND, которые равны между собою (почему?), и въ нихъ противъ равныхъ между собою сторонъ MD и ND лежатъ равные углы ABD и CBD. А въ такомъ случаѣ прямая BD есть равнодѣлящая угла ABC. Въ чемъ и надлежало убѣдиться.

Задача 9. Построить треугольникъ, котораго стороны порознь равнялись бы конечнымъ прямымъ a, b и c (черт. 106).

Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи отложимъ на произвольной безконечной прямой AB конечную прямую CD, равную прямой a. Примемъ точку C за центръ и радіусомъ, равнымъ прямой c, опишемъ окружность; затѣмъ примемъ точку D за центръ и радіусомъ, равнымъ прямой b, опишемъ другую окружность. Точки пересѣченія E_1 и E_2 этихъ окружностей соединимъ съ точками C и D.



Черт. 106.

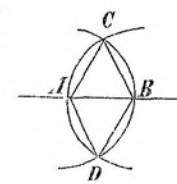
Полученный такимъ образомъ треугольникъ будетъ искомый.— Для того чтобы въ этомъ убѣдиться, примемъ во вниманіе, что $CD = a$ (почему?), $DE = b$ (почему?) и $CE = c$ (почему?).

Замѣчаніе. Эта задача либо допускаетъ два рѣшенія, либо же не допускаетъ ни одного. Дѣйствительно: если сумма двухъ какихъ-либо сторонъ не болѣе третьей, то треугольникъ съ данными сторонами невозможенъ; такъ, если $b + c$ не болѣе a, то не получится ни одной точки пересѣченія проведенныхъ окружностей; если же $a + b$ не болѣе c, или $a + c$ не болѣе b, то, отложивъ прямую CD, равную прямой a, получимъ, что a не болѣе $c - b$ или что a не болѣе $b - c$, а въ такомъ случаѣ треугольникъ, котораго стороны были бы равны a, b и c, тоже не возможенъ (теорема 44 и слѣдствіе).

Задача 10. Построить треугольникъ, равный данному.

Рѣшеніе этой задачи сводится къ задачѣ 9 и всегда возможно.

Задача 11. Построить равносторонній треугольникъ, котораго сторона равна сторонѣ AB (черт. 107).



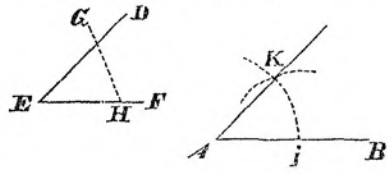
Черт 107.

Рѣшеніе этой задачи всегда возможно и тѣсно связано съ рѣшеніемъ задачи 9.

Задача 12. Провести изъ точки A прямой AB другую прямую такъ, чтобы она образовала съ прямою AB уголъ, равный данному углу DEF (черт. 108).

Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи отложимъ на прямой ED отъ точки E конечную прямую EG, равную EH, и соединимъ точки H и G прямою HG. Потомъ отложимъ на прямой AB отъ точки A вправо (или влѣво) конечную прямую AI, равную EH; принявъ точку A за центръ, радіусомъ AI опишемъ окружность; принявъ точку I за центръ, радіусомъ, равнымъ прямой HG

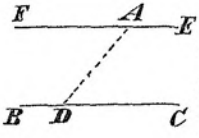
опишемъ другую окружность. Эти двѣ окружности пересѣкутся въ нѣкоторой точкѣ K (теорема 98). Соединимъ точку A съ точкою K.



Черт. 108.

Уголъ KAB равенъ данному углу DEF. — Для того, чтобы въ этомъ убѣдиться, соединимъ точки I и K прямою (на чертежѣ она не проведена), разсмотримъ треугольники KAI и GEH, которые равны между собою (почему?), и въ нихъ $\angle E = \angle A$ (почему?).

Задача 13. Изъ точки A, взятой внѣ безконечной прямой BC, провести прямую, параллельную къ прямой BC.

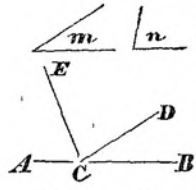


Черт. 109.

Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи соединимъ точку A съ какою-либо точкою D прямой BC; потомъ отложимъ $\angle$ DAF такъ, чтобы $\angle$ DAF былъ равенъ углу ADC и чтобы оба эти угла были накрестъ-лежащими, и продолжимъ прямую AF также и въ другомъ направленіи.

Прямая FE и будетъ параллельна прямой BC (теорема 25).

Задача 14. Одинъ изъ угловъ треугольника равенъ углу n; другой равенъ углу m (черт. 110). Найти третій.

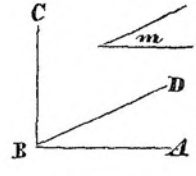


Черт. 110.

Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи построимъ (черт. 110) выпрямленный $\angle$ ACB, вычтемъ изъ него $\angle$ BDC, равный углу m, изъ остатка вычтемъ $\angle$ DCE, равный углу n.

Уголъ ACE есть третій (искомый) уголъ треугольника (почему?).

Задача 15. Одинъ изъ острыхъ угловъ прямоугольнаго треугольника равенъ углу m. Найти другой острый уголъ того же треугольника.



Черт. 111.

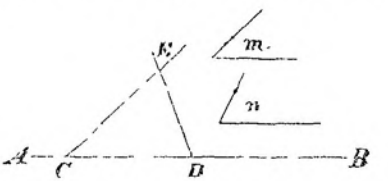
Рѣшеніе. Для рѣшенія этого построимъ (черт. 111) прямой $\angle$ ABC, изъ него вычтемъ $\angle$ ABD, равный углу m.

Уголъ DBC есть второй (искомый) уголъ прямоугольнаго треугольника (почему?).

Задача 16. Построить треугольникъ, зная одну изъ его сторонъ, которая равна данной конечной прямой a, и прилежащіе къ ней углы, которые порознь равны угламъ m и n.

Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи на прямой AB (черт. 112) возьмемъ отрѣзокъ CD, равный конечной прямой a, построимъ уголъ, равный углу m, принявъ точку C за вершину, а прямую

CD за сторону; затѣмъ построимъ, принявъ точку D за вершину и прямую DC за сторону, уголъ, равный углу n.



Черт. 112.

Если остальныя стороны построенныхъ угловъ пересѣкутся въ нѣкоторой точкѣ E, то $\triangle$ CDE *есть искомый.*—Для того, чтобы въ этомъ убѣдиться, примемъ во вниманіе, что въ этомъ треугольникѣ одна изъ сторонъ равна конечной прямой a, а прилежащіе къ ней углы—угламъ m и n.

Замѣчаніе. Если углы m и n взаимно дополняютъ другъ друга до $2d$, то прямыя CE и DE параллельны, и треугольника въ этомъ случаѣ не существуетъ. Точно также не существуетъ искомаго треугольника, если

$$\angle m + \angle n > 2d.$$

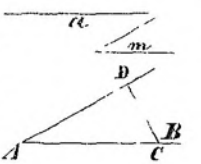
Для того, чтобы искомый треугольникъ существовалъ, необходимо и достаточно, чтобы сумма $\angle m + \angle n$ была меньше, чѣмъ $2d$ (почему?). Стало-быть, задача не всегда допускаетъ рѣшеніе. Учащемуся предоставляется рѣшить вопросъ — всегда ли возможно рѣшеніе задачи 14.

Задача 17. Построить треугольникъ, зная двѣ стороны его, которыя порознь равны прямымъ a и b, и уголъ, заключенный между ними, который равенъ углу m.

Рѣшеніе этой задачи предоставляется учащемуся.

Задача 18. Построить прямоугольный треугольникъ, зная его гипотенузу, которая равна прямой a, и одинъ изъ острыхъ угловъ, который равенъ углу m.

Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи на прямой AB (черт. 113) отложимъ отрѣзокъ AC, равный гипотенузѣ a, проведемъ изъ точки A прямую, которая образовала бы съ прямой AC уголъ, равный углу m, и изъ точки C опустимъ на эту прямую перпендикуляръ CD.

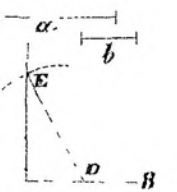


Черт. 113.

Треугольникъ ACD есть искомый (почему?).

Задача 19. Построить прямоугольный треугольникъ, зная его гипотенузу, которая равна прямой a, и одинъ изъ его катетовъ, который равенъ прямой b.

Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи на прямой AB (черт. 114) возьмемъ отрѣзокъ CD, равный катету b, изъ точки C возставимъ перпендикуляръ къ AB и радіусомъ DE, равнымъ прямой a, проведемъ окружность,



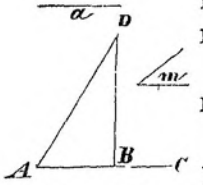
Черт. 114.

которая пересѣчетъ (всегда ли?) перпендикуляръ къ AB въ точкѣ E. Соединимъ точку D съ точкою E.

Треугольникъ CDE есть искомый (почему?).

Замѣчаніе. Учащемуся предоставляется рѣшить вопросъ о томъ — всегда ли возможенъ искомый треугольникъ?

Задача 20. Построить прямоугольный треугольникъ, зная его катетъ, который равенъ прямой a, и уголъ, ему противолежащій, который равенъ углу m.



Черт. 115.

Рѣшеніе этой задачи предоставляется учащемуся. Оно сводится къ рѣшенію задачи 15 (черт. 115).

Задача 21. Построить равнобедренный треугольникъ, зная его основаніе, которое равно прямой a, и уголъ при вершинѣ, который равенъ углу m.

Рѣшеніе этой задачи предоставляется учащемуся. Оно основано на теоремахъ 45 и 55 и сводится либо къ рѣшенію задачи 16, либо же къ рѣшенію задачи 19.

Задача 21. Построить равнобедренный треугольникъ, зная одну изъ равныхъ между собою сторонъ его, которая равна прямой a, и уголъ при основаніи.

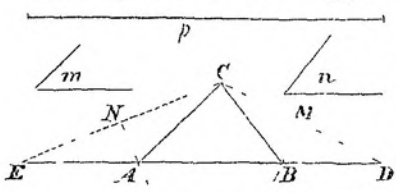
Рѣшеніе этой задачи предоставляется учащемуся. Оно основано на теоремахъ 45 и 55 и сводится къ рѣшенію задачи 19.

Замѣчаніе. Всѣ задачи, досель встрѣчавшіяся, предполагаютъ, кромѣ знанія нѣкоторыхъ теоремъ, также и знаніе способовъ ихъ рѣшенія, не представляющихъ, впрочемъ, никакихъ особенныхъ затрудненій. Изслѣдованіе возможности ихъ рѣшенія тоже не представляетъ особенныхъ трудностей.

Задача 22. Построить треугольникъ по суммѣ всѣхъ трехъ сторонъ его, которая равна прямой p, и двумъ угламъ его, которые порознь равны угламъ m и n.

Рѣшеніе. Предположимъ, что задача рѣшена и что $\triangle$ ABC (черт. 116) есть искомый, при чемъ

$$AB + BC + CA = p, \quad \angle CAB = \angle m, \text{ а } \angle CBA = \angle n.$$



Черт. 116.

Продолжимъ прямую AB въ обоихъ направленіяхъ и на продолженіяхъ отложимъ прямую BD, равную сторонѣ BC, и прямую AE, равную сторонѣ AC. Соединивъ точки E и D съ точкою C, получимъ $\triangle$ EDC, въ которомъ сторона $ED = p$ (почему?). Постараемся опредѣлить остальные его элементы. Разсматривая $\triangle$ EAC, видимъ, что

$$\angle CAB = \angle E + \angle ACE \text{ (теорема 46);}$$

но сторона EA равна сторонѣ CA. стало-быть, (теорема 55)

$$\angle E = \angle ACE = \frac{\angle CAB}{2} = \frac{\angle m}{2}.$$

Точно такъ же убѣдимся, что

$$\angle D = \angle BCD = \frac{\angle ABC}{2} = \frac{\angle n}{2}.$$

Слѣдовательно, въ тр-кѣ EDC сторона

$$ED = p, \quad \angle E = \frac{\angle m}{2}, \text{ а } \angle D = \frac{\angle n}{2},$$

и этотъ тр-къ легко можетъ быть построенъ (задача 16). Такимъ образомъ наша задача сведена къ другой (къ задачѣ 16).

Стало-быть, для рѣшенія нашей задачи построимъ $\triangle$ EDC. въ которомъ

$$ED = p, \quad \angle E = \frac{\angle m}{2}, \text{ а } \angle D = \frac{\angle n}{2}.$$

Когда этотъ треугольникъ построенъ, раздѣлимъ сторону CE пополамъ. изъ средины ея возставимъ перпендикуляръ, который пересѣчетъ сторону ED (почему?) въ нѣкоторой точкѣ A; потомъ раздѣлимъ сторону CD пополамъ, изъ средины ея возставимъ перпендикуляръ, который пересѣчетъ ED (почему?) въ нѣкоторой точкѣ B; наконецъ, соединимъ точку C съ точками A и B, и мы получимъ $\triangle$ ABC.

Полученный такимъ образомъ $\triangle$ ABC есть искомый.—Для того, чтобы въ этомъ убѣдиться, примемъ во вниманіе, что EA = AC (слѣдствіе теоремы 57), BC = BD (слѣдствіе теоремы 57); слѣдовательно AB + BC + CA = p; кромѣ того,

$$\angle CAB = \angle m \text{ (теорема 46)}$$
$$\angle CBA = \angle n \text{ (теорема 46).}$$

Замѣчаніе. При рѣшеніи этой задачи употребленъ слѣдующій пріемъ: сначала сдѣлано предположеніе, что задача рѣшена, затѣмъ проведены нѣкоторыя вспомогательныя прямыя, далѣе предложенная задача сведена къ другой, рѣшеніе которой извѣстно. Когда болѣе простая задача была нами разрѣшена, мы отъ нея перешли къ рѣшенію предложенной.

Задача 23. Построить треугольникъ по его периметру, т. е. суммѣ всѣхъ трехъ сторонъ его, которая равна прямой p, по перпендикуляру, опущенному изъ одной вершины на противолежащую сторону, который равенъ прямой h, и по углу, прилежащему къ этой сторонѣ, который равенъ углу m (черт. 117).

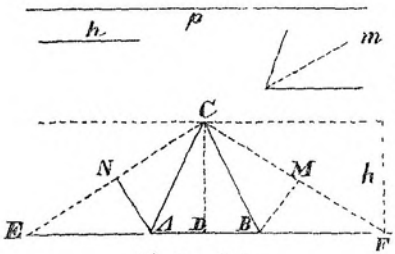
Рѣшеніе. Предположимъ, что задача рѣшена и что $\triangle$ ABC есть искомый, при чемъ (черт. 117)

AB + BC + CA = p, CD $\perp$ AB, CD = h и $\angle CAB = \angle m$.

Продолжимъ прямую AB въ обоихъ направленіяхъ и на продолженіяхъ отложимъ прямую BF, равную сторонѣ BC, и прямую AE, равную сторонѣ AC. Соединивъ точки E и F съ точкою C, получимъ $\triangle$ ECF, въ которомъ сторона

$$EF = p, \quad \angle E = \frac{\angle BAC}{2} = \frac{\angle m}{2},$$

и высота котораго $CD = h$. Такимъ образомъ предложенная задача сведена къ другой, а именно къ слѣдующей: построить треугольникъ по сторонѣ, прилежащему къ ней углу и перпендикуляру, опущенному на эту сторону изъ противолежащей вершины. Но рѣшеніе этой задачи намъ тоже неизвѣстно. Обратимся поэтому къ фигурѣ ECF, а въ ней—къ тр-ку ACD. Это—треугольникъ прямоугольный, у котораго катетъ CD, а острый уголъ E, ему противолежащій, равенъ половинѣ угла m. Такимъ образомъ предложенная задача сведена къ задачѣ 20, въ которой требуется, по катету и противолежащему ему острому углу, построить прямоугольный треугольникъ.



Черт. 117.

Стало-быть, для рѣшенія нашей задачи надо прежде всего построить прямоугольный $\triangle$ EDC, въ которомъ

$$\angle E = \frac{\angle m}{2}, \text{ а катетъ } DC = h.$$

Для этого проведемъ прямую EF и построимъ $\angle E$, равный половинѣ угла m; изъ какой либо точки прямой EF проведемъ перпендикуляръ, равный прямой h, изъ конца этого перпендикуляра проведемъ прямую параллельно прямой EF, и эта прямая линія пересѣчетъ прямую EC (почему?) въ точкѣ C; наконецъ, опустимъ перпендикуляръ CD на прямую EF. Полученный $\triangle$ ECD есть искомый прямоугольный треугольникъ. Если прямая $EF = p$, то, соединивъ точку C съ точкою F, получимъ $\triangle$ ECF, котораго сторона равна p, высота $CD = h$, а $\angle E$ равенъ половинѣ угла m. Такимъ образомъ построенъ $\triangle$ ECF, къ построенію котораго первоначально сведена предложенная задача. Теперь остается только раздѣлить прямыя EC и CF пополамъ, изъ срединъ ихъ къ нимъ провести перпендикуляры, которые пересѣкутъ прямую EF (почему?) въ точкахъ A и B. Соединивъ точки A и B съ точкою C, получимъ $\triangle$ ABC.

Полученный такимъ образомъ треугольникъ ABC есть искомый.—Убѣдиться въ этомъ предоставляется учащемуся.

Замѣчаніе 1-ое. При рѣшеніи задачъ такого рода слѣдуетъ, для бо́льшей вразумительности, дѣлать два чертежа: на одномъ сдѣлать предположеніе и провести всѣ вспомогательныя линіи, которыя нужны для рѣшенія задачи и сведенія ея рѣшенія къ рѣшенію другихъ задачъ, на другомъ же—выполнить окончательное рѣшеніе, когда оно найдено, и доказать вѣрность рѣшенія.

Замѣчаніе 2-ое. Рѣшеніе задачъ 1—21 отличается тѣмъ, что требуетъ знанія *пріемовъ* рѣшенія; что же касается задачъ 22 и 23, то онѣ рѣшены *способомъ аналитическимъ*. Онъ состоитъ въ слѣдующемъ: предполагается, что задача рѣшена, затѣмъ приблизительно вычерчивается искомая фигура, проводятся вспомогательныя линіи и, если эти послѣднія выбраны удачно, то задача сводится къ другой, болѣе простой; если рѣшеніе этой послѣдней неизвѣстно, съ нею поступаютъ такимъ же образомъ и т. д., покуда, наконецъ, задача не сведется къ задачѣ вполнѣ извѣстной; когда такимъ образомъ полученъ цѣлый рядъ задачъ, изъ которыхъ каждая сводится къ слѣдующей, а послѣдняя можетъ быть разрѣшена, рѣшаютъ сначала послѣднюю, потомъ ей предшествующую и т. д., покуда не будетъ рѣшена предложенная задача. Затѣмъ остается еще убѣдиться въ справедливости рѣшенія и изслѣдовать—всегда ли возможно рѣшеніе предложенной задачи, и, если ея рѣшеніе возможно, то сколько фигуръ удовлетворяетъ условіямъ ея. Такимъ образомъ аналитическое рѣшеніе задачи, носящее также названіе *способа послѣдовательныхъ подстановокъ*, распадается на слѣдующія операціи: 1) предположеніе, что задача рѣшена, проведеніе вспомогательныхъ линій, ихъ подробное разсмотрѣніе и сведеніе предложенной задачи къ другимъ задачамъ; 2) собственно рѣшеніе задачи; 3) доказательство вѣрности рѣшенія, и 4) изслѣдованіе возможности и числа рѣшеній. Совокупность поименованныхъ въ пунктѣ 1-мъ операцій носитъ иногда названіе *анализа задачи*, охарактеризованная въ пунктѣ 2-мъ операція носитъ названіе *рѣшенія*, въ 3-мъ — *доказательства*, въ 4-мъ — *изслѣдованія рѣшенія*. Наибольшей изобрѣтательности требуетъ проведеніе надлежащихъ вспомогательныхъ линій, наибольшей осторожности — изслѣдованіе рѣшенія задачи. Общаго правила, которое несомнѣнно приводило бы къ рѣшенію всякой задачи, не существуетъ. Очень часто все дѣло зависитъ отъ счастливой идеи въ выборѣ тѣхъ или иныхъ вспомогательныхъ линій.

Задача 24. По даннымъ двумъ сторонамъ треугольника a и b, и углу m, противолежащему одной изъ нихъ, построить тр-къ.

Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи (выполненіе чертежа предоставляется учащемуся) построимъ уголъ ABC, равный данному;

на одной изъ сторонъ, его принявъ вершину за начало, отложимъ прямую CD, равную одной изъ данныхъ сторонъ треугольника, напр., сторонѣ a; примемъ точку D за центръ, а другую изъ сторонъ искомаго треугольника—за радіусъ окружности.

Въ точкѣ пересѣченія этой окружности съ прямою BC должна лежать третья вершина треугольника.

При этомъ могутъ быть четыре случая:

1) Окружность, проведенная указаннымъ радіусомъ изъ точки D какъ изъ центра, не пересѣчетъ прямой BC (теорема 83): это имѣетъ мѣсто тогда, когда сторона B меньше перпендикуляра DP, проведеннаго изъ точки D къ прямой BC; въ этомъ случаѣ не существуетъ такого тр—ка, который удовлетворялъ бы условіямъ задачи, т. е. задача не имѣетъ ни одного рѣшенія.

2) Окружность, проведенная указаннымъ радіусомъ, есть касательная къ прямой BC (теорема 81): это имѣетъ мѣсто тогда, когда сторона $b = DP$; въ этомъ случаѣ искомый треугольникъ есть треугольникъ прямоугольный, котораго гипотенуза равна одной изъ данныхъ прямыхъ, одинъ изъ острыхъ угловъ равенъ данному, а противолежащій ей катетъ равенъ другой изъ данныхъ прямыхъ, т. е. задача имѣетъ только одно рѣшеніе.

3) Окружность, проведенная указаннымъ радіусомъ, пересѣкаетъ прямую BC въ одной точкѣ, другая же точка пересѣченія окружности и прямой лежитъ на продолженіи CB (теорема 82 и теорема 62): это имѣетъ мѣсто тогда, когда сторона b больше перпендикуляра DP и, кромѣ того, больше стороны a; въ этомъ случаѣ въ искомомъ треугольникѣ данъ уголъ, противолежащій большей изъ данныхъ двухъ сторонъ его, и задача имѣетъ тоже только одно рѣшеніе.

4) Окружность, проведенная указаннымъ радіусомъ, пересѣкаетъ прямую BC въ двухъ точкахъ, лежащихъ по одну и ту же сторону точки B прямой BC: это имѣетъ мѣсто тогда, когда сторона b больше перпендикуляра DP, но меньше стороны a (теорема 82 и теорема 62); въ этомъ случаѣ данный уголъ искомаго треугольника лежитъ противъ меньшей изъ данныхъ двухъ сторонъ его, и задача имѣетъ два различныхъ рѣшенія.

Замѣчаніе. Эта задача принадлежитъ къ числу тѣхъ, гдѣ способъ послѣдовательныхъ подстановокъ не оказываетъ почти никакихъ услугъ.

Задача 25. Раздѣлить прямой уголъ на три равныя части.

Рѣшеніе этой задачи предоставляется учащемуся, при чемъ ему рекомендуется принять во вниманіе, что каждый изъ угловъ равносторонняго тр-ка равна $\frac{2}{3}$ d.

Замѣчаніе. Раздѣленіе любого угла на три равныя части представляетъ собою задачу, не разрѣшимую съ помощью прямой линіи и окружности. Ср. замѣчаніе, которымъ снабжено допущеніе относительно угловъ (стр. 17).

§ 9. О хордахъ, дугахъ и углахъ въ кругѣ.

Теорема 101. Если радіусы двухъ круговъ равны между собою, то и окружности этихъ круговъ между собою равны.

Доказательство. Пусть даны двѣ окружности и пусть радіусъ одной равенъ радіусу другой; требуется доказать, что и окружности равны между собою, т. е. совмѣстимы одна съ другою.— Для доказательства этого наложимъ одинъ кругъ на другой такъ, чтобы ихъ центры совпали и плоскость одного совпала съ плоскостью другого (теорема 2). Тогда каждая точка первой окружности совпадетъ съ нѣкоторою точкою второй и обратно. Ибо, если бы хоть одна изъ точекъ одной окружности легла внѣ другой окружности, то одинъ радіусъ одной окружности былъ бы больше или меньше равнаго ему радіуса другой. Чего быть не можетъ. Стало-быть, окружности, у которыхъ равные радіусы, между собою тоже равны. Что и требовалось доказать.

Теорема 102 (обратная теоремѣ 101). *Если двѣ окружности* равны между собою, то и радіусы ихъ между собою равны.

Доказательство. Пусть двѣ окружности равны между собою; требуется доказать, что ихъ радіусы между собою равны. — Для доказательства этого наложимъ одну окружность на другую такъ, чтобы онѣ совпали; тогда въ результатѣ получится одна окружность; а у всякой окружности только одинъ центръ. Стало-быть, у совпавшихъ окружностей и центры совпали. А разъ окружности совпали и центры окружностей тоже совпали, то радіусы первой окружности совпали съ радіусами второй, т. е. радіусы одной окружности равны радіусамъ другой. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Теоремы 101 и 102 принадлежатъ къ числу теоремъ, доказательство которыхъ можетъ быть ведено безъ чертежа.

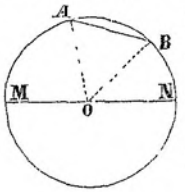
Опредѣленія. Конечная прямая, соединяющая двѣ точки окружности, называется *хордою*. Хорда, проходящая чрезъ центръ, называется *діаметромъ* или *поперечникомъ* круга и окружности. Часть окружности, ограниченная двумя ея точками, называется *дугою* окружности. О дугѣ и хордѣ одной и той же окружности иногда говорятъ, что онѣ *стягиваютъ* одна другую, если у

нихъ однѣ и тѣ же крайнія точки; условимся хорду и дугу, ею стягиваемую, называть также *соотвѣтствующими другъ другу*. Часть круга, ограниченная хордою и соотвѣтствующею ей дугою, называется *сегментомъ круга*. Слово „дуга“ на письмѣ иногда замѣняется знакомъ ⌒

Уголъ, образованный двумя радіусами одной и той же окружности, называется *центральнымъ*. Дугою даннаго центральнаго угла называется дуга, заключенная между его сторонами. О центральномъ углѣ иногда говорятъ, что онъ *опирается* на свою дугу. Часть круга, ограниченная двумя радіусами его и дугою окружности, содержащеюся между концами этихъ радіусовъ, называется *секторомъ круга*.

Теорема 103. Изъ всѣхъ хордъ окружности наибольшая есть діаметръ.

Доказательство. Пусть (черт. 118) дана окружность, которой діаметръ MN; требуется доказать, что всякая хорда AB, не проходящая чрезъ центръ, меньше діаметра. — Для доказательства этого соединимъ центръ O этой окружности съ точками A и B хорды AB. Получимъ △ AOB, въ которомъ $AO + OB > AB$, но $AO + OB = MN$, стало-быть $MN > AB$. Что̀ и требовалось доказать.



Черт. 118.

Теорема 104. Діаметръ всякой окружности дѣлитъ ее по-поламъ.

Доказательство. Пусть (выполненіе чертежа предоставляется учащемуся) линія AB есть діаметръ окружности, которой центръ есть точка C; требуется доказать, что дуга AMB равна дугѣ ANB.—Для доказательства этого примемъ діаметръ AB за ось вращенія и перегнемъ фигуру AMB вокругъ этой оси такъ, чтобы точка M совпала съ какою-нибудь точкою плоскости фигуры ANB. При этомъ точка M непремѣнно должна совпасть съ нѣкоторою точкою P, лежащею въ точкѣ пересѣченія дуги ANB и перпендикуляра, проведеннаго изъ точки M къ діаметру AB. Точно также и всякая другая точка дуги AMB совпадетъ съ нѣкоторою точкою дуги ANB, и обратно: всякая точка ANB совпадетъ съ нѣкоторою точкою AMB. Такимъ образомъ ⌒ AMB = ⌒ ANB, т. е діаметръ дѣлитъ окружность пополамъ. Что̀ и требовалось доказать.

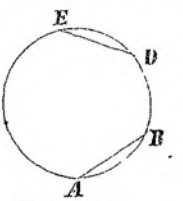
Теорема 105 (обратная теоремѣ 104). Если двѣ точки дѣлятъ окружность пополамъ, то прямая ихъ соединяющая, проходитъ чрезъ центръ, т. е. есть діаметръ.

Доказательство. Пусть въ окружности O точки A и B дѣлятъ ее пополамъ, такъ что ⌒ AMB = ⌒ ANB; требуется до-

казать, что прямая AB есть діаметръ.—Для доказательства этого предположимъ, что AB не діаметръ; тогда изъ точки A чрезъ центръ проведемъ діаметръ, который въ такомъ случаѣ пересѣчетъ окружность не въ точкѣ B, а въ нѣкоторой другой точкѣ D; въ такомъ случаѣ $\smile$ AMD равна половинѣ окружности (теорема 104); но, по условію, $\smile$ AMB равна половинѣ окружности, слѣдовательно (аксіома 11) $\smile$ AMD $=\smile$ AMB, чего быть не можетъ. Стало-быть, прямая AB есть діаметръ. Что и требовалось доказать.

Теорема 106. Если двѣ хорды одной и той же окружности равны между собою, то и дуги ихъ между собою равны.

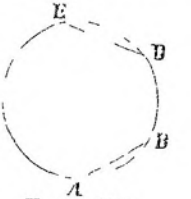
Доказательство. Пусть (черт. 119) хорда AB равна хордѣ DE; требуется доказать, что дуга AB равна дугѣ DE.—Для доказательства этого наложимъ сегментъ DE на сегментъ AB такъ, чтобы точка D совпала съ точкою A, точка E съ точкою B и какая-нибудь точка дуги ED упала бы по ту же сторону прямой AB, гдѣ находятся всѣ точки дуги AB. Всѣ точки дуги DE должны совпасть въ такомъ случаѣ съ точками дуги AB и обратно, ибо въ противномъ случаѣ получилось бы, что не всѣ радіусы одной и той же окружности равны между собою, чего быть не можетъ. Стало-быть, эти дуги совмѣстимы, т. е. равны между собою. Что и требовалось доказать.



Черт. 119.

Теорема 107 (обратная теоремѣ 106). Если двѣ дуги одной и той же окружности совмѣстимы, то и хорды ихъ тоже между собою равны.

Доказательство. Пусть (черт. 120) $\smile$ AB $=\smile$ CD; требуется доказать, что хорда AB равна хордѣ CD.—Для доказательства этого наложимъ сегментъ ED на сегментъ AB такъ, чтобы точка D совпала съ точкою A и дуга DE пошла по дугѣ AB. Вслѣдствіе совмѣстимости этихъ дугъ, крайняя точка C при этомъ совпадетъ съ крайнею точкою B. Стало-быть, хорда AB равна хордѣ ED. Что и требовалось доказать.



Черт. 120.

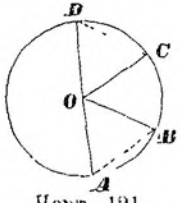
Замѣчаніе 1-ое. Когда говорятъ о дугѣ, соотвѣтствующей данной хордѣ, то при этомъ обыкновенно имѣется въ виду меньшая часть окружности, а не бо́льшая изъ дугъ, соотвѣтствующихъ данной хордѣ; но теоремы 106 и 107 справедливы также и въ томъ случаѣ, когда имѣются въ виду дуги, составляющія бо́льшую часть окружности.

Замѣчаніе 2-ое. Теоремы 106 и 107, а равно и другія теоремы, въ которыхъ разсматриваются свойства двухъ фигуръ въ

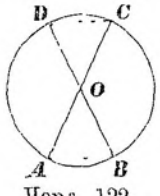
одной и той же окружности, справедливы также и въ томъ случаѣ, когда эти фигуры берутся въ двухъ равныхъ окружностяхъ; таковы теоремы:

Теорема 108. Если двѣ дуги одной и той же окружности равны между собою, то центральные углы, на нихъ опирающіеся, тоже между собою равны.

Доказательство. Пусть (черт. 121) дуги AB и CD одной и той же окружности равны между собою; требуется доказать, что углы AOB и COD тоже между собою равны.—Для доказательства этого соединимъ точки A и B хордою AB и точки C и D хордою CD; получимъ два треугольника AOB и COD, въ которыхъ стороны AO=CO, OB = OD и AB = CD (теор. 107). Такимъ образомъ треугольники AOB и COD равны между собою (теорема 50); а въ равныхъ треугольникахъ соотвѣтствующіе элементы равны между собою. Стало-быть, $\angle AOB = \angle COD$. Что и требовалось доказать.



Черт. 121.



Черт. 122.

Теорема 109 (обратная теоремѣ 108). Если центральные углы въ одной и той же окружности равны между собою, то и дуги ихъ тоже между собою равны.

Доказательство. Пусть (черт. 122) центральные углы AOB и COD равны между собою; требуется доказать, что дуги AB и CD тоже между собою равны. — Для доказательства этого соединимъ точки A и B хордою AB, а точки C и D хордою CD; получимъ два треугольника AOB и COD, у которыхъ стороны AO = OC, OB = OD и $\angle AOB = \angle COD$ по условію. Вслѣдствіе этого треугольники эти равны между собою (теорема 51). Стало-быть, хорда AB равна хордѣ CD, откуда слѣдуетъ (теорема 106), что дуга AB равна дугѣ CD. Что и требовалось доказать.

Теорема 110. Если дуги двухъ центральныхъ угловъ не равны между собою, то большей дугѣ соотвѣтствуетъ большій уголъ.

Доказательство. Пусть (выполненіе чертежа предоставляется учащемуся) дуга AB центральнаго угла AOB больше дуги CD центральнаго угла COD; требуется доказать, что $\angle AOB > \angle COD$.—Для доказательства этого отложимъ на дугѣ AB дугу AE, равную дугѣ CD; точка E будетъ находиться между точками A и B. Соединивъ точку E съ центромъ O, получимъ уголъ AOE, который равенъ углу COD (теорема 108), но меньше угла AOB (опредѣленіе неравныхъ угловъ). Стало-быть, $\angle AOB > \angle COD$. Что и требовалось доказать.

Теорема 111 (обратная теоремѣ 110). Если центральные углы въ одной и той же окружности не равны между собою, то большему углу соотвѣтствуетъ бо́льшая дуга.

Доказательство этой теоремы ведется отъ противоположнаго и предоставляется учащемуся.

Теорема 112 (противоположная теоремѣ 107). Если двѣ дуги одной и той же окружности не равны между собою, то большей дугѣ соотвѣтствуетъ бо́льшая хорда.

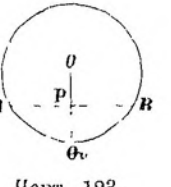
Доказательство. Пусть (выполненіе чертежа предоставляется учащемуся) дуга AB больше дуги CD; требуется доказать, что хорда AB больше хорды CD.—Для доказательства этого соединимъ центръ O съ точками A, B, C и D; получимъ два треугольника, въ которыхъ двѣ стороны одного равны двумъ сторонамъ другого, а углы, заключенные между этими сторонами, между собою не равны (теорема 110). Противолежащія въ нихъ неравнымъ угламъ стороны между собою тоже не равны, и притомъ—противъ бо́льшаго угла лежитъ бо́льшая сторона (теорема 53); стало-быть, хорда AB больше хорды CD. Что и требовалось доказать.

Теорема 113 (обратная теоремѣ 112). Если двѣ хорды одной и той же окружности не равны между собою, то большей хордѣ соотвѣтствуетъ большая дуга.

Доказательство этой теоремы ведется отъ противоположнаго и предоставляется учащемуся.

Теорема 114. Если радіусъ перпендикуляренъ къ хордѣ той же окружности, то онъ дѣлитъ эту хорду и соотвѣтствующую ей дугу пополамъ.

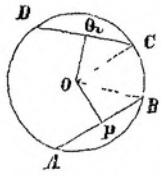
Доказательство. Пусть (черт. 123) дана хорда AB и пусть прямая OP перпендикулярна къ этой хордѣ; требуется доказать, что $AP = BP$, а $\smile AQ = \smile BQ$. — Для доказательства этого соединимъ точки A и B съ центромъ O. Получимъ равнобедренный треугольникъ AOB, въ которомъ перпендикуляръ OP (слѣдствіе 1-ое теоремы 56) дѣлитъ основаніе AB пополамъ и $\angle AOB$ тоже пополамъ (слѣдствіе 2). Въ такомъ случаѣ и дуга AQ должна быть равна BQ (теорема 109). Стало-быть, радіусъ, перпендикулярный къ хордѣ той же окружности, дѣлитъ эту хорду и соотвѣтствующую ей дугу пополамъ. Что и требовалось доказать.



Черт. 123.

Теорема 115. Если двѣ хорды одной и той же окружности равны между собою, то разстоянія ихъ отъ центра тоже равны между собою.

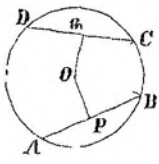
Доказательство Пусть (черт. 124) хорда AB равна хордѣ CD: требуется доказать, что разстояніе первой хорды отъ центра равно разстоянію второй изъ нихъ, т. е., что перпендикуляръ OP равенъ перпендикуляру OQ.—Для доказательства этого соединимъ точки B и C съ центромъ O; получимъ два тр-ка, у которыхъ гипотенузы равны между собою, какъ радіусы одной и той же окружности, а катеты PB и QC равны между собою, какъ половины одинаковыхъ величинъ (теорема 114); слѣдовательно треугольники BOP и COQ равны между собою (теорема 66). Стало-быть, OP = OQ. Что и требовалось доказать.



Черт. 124.

Теорема 116 (обратная теоремѣ 115). Если двѣ хорды одной и той же окружности равно отдалены отъ центра, то эти хорды равны между собою.

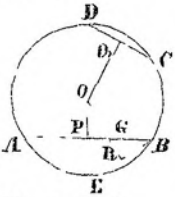
Доказательство. Пусть (черт. 125) даны хорды AB и CD, и пусть перпендикуляръ OP равенъ перпендикуляру OQ; требуется доказать, что и самыя хорды равны между собою.— Для доказательства этого соединимъ точки C и B съ центромъ O и разсмотримъ треугольники BOP и COQ; въ нихъ гипотенузы равны между собою какъ радіусы одной и той же окружности, а катеты OP и OQ равны между собою по условію, т. е. треугольники между собою равны (теорема 66). Слѣдовательно, PB должно равняться QC. Но PB представляетъ половину хорды AB, а QC половину хорды CD; стало-быть, половины двухъ величинъ равны между собою, а потому (аксіома 8) и самыя хорды AB и CD тоже между собою равны. Что и требовалось доказать.



Черт. 125.

Теорема 117. Если двѣ хорды одной и той же окружности между собою не равны, то меньшая хорда отстоитъ отъ центра дальше, чѣмъ бо́льшая.

Доказательство. Пусть (черт. 126) хорда AB больше хорды CD; требуется доказать, что перпендикуляръ OQ больше перпендикуляра OP.—Для доказательства этого отложимъ дугу DC отъ точки B на дугу BA. и пусть $\smile$ BE = $\smile$ DC. Точка E должна находиться между точками A и B, потому что дуга DC меньше дуги BA. Проведемъ хорду BE. которая должна быть равна хордѣ CD (теорема 107). Проведемъ изъ точки O перпендикуляръ OR къ EB. Пусть точка пересѣченія прямой AB съ перпендикуляромъ OR будетъ точка



Черт. 126.

G; тогда OP < OG, а OG < OR; стало-быть, и подавно OP < OR (аксіома 7). Что и требовалось доказать.

Теорема 118 (обратная теоремѣ 117) Если двѣ хорды одной и той же окружности не равно отдалены отъ центра, то болѣе отдаленная хорда меньше.

Доказательство этой теоремы ведется способомъ приведенія къ нелѣпости и предоставляется учащемуся.

Задача 26. Найти центръ данной дуги окружности.

Рѣшеніе этой задачи предоставляется учащемуся, при чемъ присовокупляется, что оно основано на теоремѣ 58.

Замѣчаніе. Задачу 27 можно разрѣшить или способомъ аналитическимъ, или же пользуясь тѣмъ, что перпендикуляръ, возставленный изъ середины данной конечной прямой, есть геометрическое мѣсто точекъ, равно-отстоящихъ отъ концовъ этой прямой. См. замѣчаніе, которымъ снабжена теорема 65.

Опредѣленія. Въ математикѣ, какъ извѣстно, длина вообще принимается за *величину*, а длина той или другой опредѣленной прямой линіи—за нѣкоторое опредѣленное *значеніе* этой величины. Съ этой точки зрѣнія, длина діагонали и длина стороны квадрата или длина какой угодно другой конечной прямой суть различныя значенія одной и той же величины—длины вообще. Точно также 5 фунтовъ и 4 пуда суть два значенія той величины, которая извѣстна подъ именемъ *вѣса*. 7 сутокъ и 2 года—два значенія одной и той же величины, извѣстной подъ именемъ *промежутка времени*, и т. д. Но, для краткости, иногда, вмѣсто того чтобы говорить о двухъ значеніяхъ одной и той же величины, говорятъ просто о двухъ величинахъ, и въ этомъ случаѣ эти величины называются *однородными*. *Общею мѣрою* двухъ значеній одной и той же величины, или короче: общею мѣрою двухъ величинъ называется такая величина, которая содержится въ каждой изъ этихъ величинъ нѣкоторое цѣлое число разъ. *Отношеніемъ* одной величины къ другой, однородной съ нею, величинѣ называется отвлеченное число, на которое должна быть помножена вторая величина для того, чтобы получилась первая. *Измѣрить* одну величину другою значитъ найти отношеніе первой величины ко второй. Если вторая величина обыкновенно употребляется для измѣренія однородныхъ съ нею величинъ, то она называется *единицею мѣры* для этого рода величинъ. Если $A = B.m$, гдѣ m есть отношеніе величины A къ величинѣ B, то

$$m = A : B = \frac{A}{B},$$

гдѣ буквы A и B обозначаютъ данныя двѣ однородныя величины, выраженныя въ какихъ-либо одинаковыхъ единицахъ мѣры.

Замѣчаніе. Объ общей мѣрѣ и объ отношеніи двухъ величинъ можетъ быть рѣчь только тогда, когда эти величины однородны и когда онѣ принадлежатъ къ числу величинъ *математическихъ*, т. е. такихъ, относительно которыхъ могутъ быть установлены понятія равенства и суммы двухъ величинъ.

Лемма 7. Если отношеніе одной величины къ другой есть число цѣлое, отличающееся отъ единицы, то за общую мѣру этихъ двухъ величинъ можетъ быть принята меньшая изъ нихъ.

Доказательство. Пусть даны двѣ однородныя величины A и B и пусть отношеніе первой величины ко второй равняется цѣлому числу m; требуется доказать, что величина B есть общая мѣра обѣихъ величинъ.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что

$$A = B.m, \text{ или что } A : B = m,$$

т. е., что B содержится въ A цѣлое число разъ. Но отношеніе $B : B = 1$, а единица есть тоже число цѣлое. Стало-быть, общая мѣра этихъ двухъ величинъ равна величинѣ B, т. е. меньшей изъ нихъ. Что и требовалось доказать.

Лемма 8. Если отношеніе одной величины къ другой равно какому-нибудь дробному числу, котораго числитель и знаменатель суть числа цѣлыя, то у этихъ двухъ величинъ есть общая мѣра, равная нѣкоторой опредѣленной долѣ одной изъ нихъ.

Доказательство. Пусть даны двѣ величины A и B и пусть

$$A = B.\frac{m}{n},$$

гдѣ m и n суть числа цѣлыя; требуется доказать, что у величинъ A и B есть общая мѣра.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что въ A содержится m такихъ долей величины B, какихъ въ B содержится n; стало-быть, у обѣихъ величинъ есть общая мѣра, и притомъ эта общая мѣра равна одной n-той долѣ величины B, каковая доля въ величинѣ B содержится ровно n разъ, а въ величинѣ A ровно m разъ, гдѣ m и n суть числа цѣлыя. Что и требовалось доказать.

Задача 27. Найти общую мѣру двухъ конечныхъ прямыхъ AB и CD.

Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи прямую CD (выполненіе предоставляется учащемуся) отложимъ на прямую AB столько разъ, сколько разъ она можетъ помѣститься въ ней, т. е. будемъ откладывать до тѣхъ поръ, пока получится остатокъ меньшій прямой CD. Пусть CD въ AB помѣстилась 2 раза и пусть остатокъ EB меньше прямой CD. Тогда имѣемъ равенство:

$$(I) \quad AB = 2CD + EB.$$

Отложимъ остатокъ EB на прямую CD такъ, чтобы получился остатокъ, меньшій EB. Пусть EB помѣстилась въ CD одинъ разъ, а остатокъ FD меньше остатка EB. Тогда имѣемъ равенство:

$$(II) \quad CD = EB + FD.$$

Отложимъ второй остатокъ на первый остатокъ до тѣхъ поръ, покуда получится новый остатокъ, меньшій чѣмъ FD. Пусть FD въ EB помѣстилась 6 разъ и пусть GB меньше FD; тогда имѣемъ:

$$(III) \quad EB = 6FD + GB.$$

Отложимъ GB въ FD и пусть GB помѣстилась въ FD ровно 2 раза; тогда имѣемъ:

$$(IV) \quad FD = 2GB.$$

Подставивъ изъ равенства IV въ равенство III значеніе 2GB величины FD, мы получимъ, что

$$EB = 12GB + GB = 13GB.$$

Подставивъ эту величину прямой EB и полученную выше величину прямой FD въ равенство II, получимъ, что

$$CD = 13GB + 2GB = 15GB.$$

Подставивъ, наконецъ, эту величину прямой CD и полученную раньше величину прямой EB въ равенство I, получимъ, что

$$AB = 30GB + 13GB = 43GB.$$

Такимъ образомъ мы получили, что $AB = 43GB$, а $CD = 15GB$, т. е. что величина GB содержится въ той и въ другой цѣлое число разъ (въ одной 43 раза, а въ другой — 15 разъ). Отсюда вытекаетъ правило: для нахожденія общей мѣры двухъ прямыхъ можно меньшую изъ нихъ отложить на бо́льшую; если она помѣстится въ большей цѣлое число разъ, то она и будетъ общею мѣрою обѣихъ величинъ; если же получится остатокъ, меньшій меньшей величины, то этотъ остатокъ откладываютъ на меньшую величину, и если этотъ остатокъ помѣстится въ меньшей величинѣ цѣлое число разъ, то онъ и будетъ общею мѣрою обѣихъ величинъ; если же получится новый остатокъ, то этотъ послѣдній остатокъ откладываютъ на первый остатокъ до тѣхъ поръ, покуда это возможно; если при этомъ второй остатокъ въ первомъ помѣщается цѣлое число разъ, то второй остатокъ и будетъ общею мѣрою обѣихъ величинъ; если же онъ въ первомъ остаткѣ не помѣстится цѣлое число разъ, то ту же операцію продолжаютъ съ остальными остатками, и послѣдній остатокъ, который помѣщается въ предпослѣднемъ цѣлое число разъ, является общею мѣрою двухъ прямыхъ.

Замѣчаніе 1-ое Найдя общую мѣру двухъ прямыхъ, можно вычислить ихъ отношеніе. Такъ, въ предыдущемъ случаѣ

$$AB = 43GB,$$

а

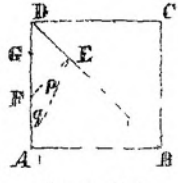
$$CD = 15GB.$$

откуда (аксіома 13) $AB : CD = 43 : 15$.

Замѣчаніе 2-ое. Вышеизложенный способъ отысканія общей мѣры приводитъ къ общей *наибольшей* мѣрѣ, которая, конечно, есть не единственная общая мѣра данныхъ величинъ. Отношеніе же данныхъ величинъ выражается въ этомъ случаѣ дробью несократимою.

Лемма 9. Если сторону квадрата отложить на его діагональ, то получится остатокъ, меньшій стороны квадрата; если этотъ остатокъ отложить на сторону квадрата, то получится новый остатокъ, меньшій перваго остатка; если второй остатокъ отложить на первый остатокъ, то получится третій остатокъ, меньшій второго; и сколько бы мы ни продолжали эту операцію, мы всегда будемъ получать нѣкоторый новый остатокъ.

Доказательство. Пусть (черт. 127) фигура ABCD есть квадратъ, а прямая BD его діагональ, отложимъ AB на BD. Такъ какъ AB меньше BD, то AB помѣстится въ BD нѣкоторое число разъ. Но сторона AB не можетъ уложиться въ діагонали BD болѣе одного раза, потому что еслибы она помѣстилась въ BD два раза, то сторона треугольника была бы равна суммѣ двухъ прочихъ сторонъ, чего быть не можетъ (теорема 44). Невозможно также, чтобы AB помѣстилась въ BD болѣе двухъ разъ, потому что тогда сторона треугольника была бы болѣе суммы двухъ прочихъ сторонъ, чего тоже не можетъ быть (теорема 44). Итакъ, сторона AB въ діагонали BD можетъ уложиться одинъ разъ, и при этомъ долженъ получиться остатокъ ED, меньшій, чѣмъ сторона AB. Соединимъ точку E съ точкою A; $\triangle ABE$ есть треугольникъ равнобедренный. Проведемъ изъ точки E перпендикуляръ къ діагонали BD, и пусть этотъ перпендикуляръ пересѣчетъ сторону AB въ точкѣ F; тогда получимъ прямоугольный треугольникъ DEF, въ которомъ одинъ изъ острыхъ угловъ равенъ половинѣ прямого, стало-быть, и другой долженъ быть равенъ тому же, а потому $\triangle DEF$ долженъ быть треугольникомъ тоже равнобедреннымъ (теорема 59), въ которомъ



Черт. 127.

$$DE = EF.$$

Проведя прямую AE, получимъ, что

$$\angle p = \angle q,$$

т. е. $\triangle$ EFA есть тоже треугольникъ равнобедренный (теорема 59), въ которомъ

$$AF = EF.$$

Но $EF = DE$. Слѣдовательно, еслибы мы первый остатокъ ED отложили на сторону AD, отъ точки A, то онъ совмѣстился бы въ ней съ прямою AF, которой онъ равенъ, и потомъ помѣстился бы еще одинъ разъ въ прямой FD, при чемъ снова получился бы остатокъ. Ибо, всматриваясь въ фигуру DEF, мы видимъ, что прямая DE можетъ быть разсматриваема какъ діагональ новаго квадрата, а выше мы видѣли, что сторона квадрата въ его діагонали помѣщается одинъ разъ и даетъ въ остаткѣ величину меньшую этой стороны. Итакъ, сторона даннаго квадрата ABCD, будучи отложена на діагональ, даетъ нѣкоторый остатокъ EB, который, въ свою очередь, будучи отложенъ на сторону квадрата, тоже даетъ остатокъ DG того же рода, что остатокъ ED. Еслибы мы продолжали ту же операцію далѣе, то мы увидѣли бы, что и этотъ остатокъ, отложенный на первый остатокъ, снова даетъ остатокъ, и т. д. Что́ и требовалось доказать.

Опредѣленіе. Два значенія одной и той же величины, которыя не имѣютъ общей мѣры, называются *несоизмѣримыми* другъ съ другомъ, въ то время какъ два значенія одной и той же величины, у которыхъ есть общая мѣра, называются *соизмѣримыми* другъ съ другомъ. Если одно изъ данныхъ соизмѣримыхъ другъ съ другомъ значеній нѣкоторой величины принято за единицу мѣры при измѣреніи значеній этой величины, то говорятъ, что другое значеніе величины *соизмѣримо съ единицею*; въ противномъ случаѣ говорятъ, что оно *съ единицею несоизмѣримо*.

Замѣчаніе 1-ое. Лемма 9 доказываетъ, что несоизмѣримыя значенія одной и той же величины существуютъ. Она можетъ быть выражена и такъ: длина діагонали квадрата и длина стороны его суть два несоизмѣримыхъ одно съ другимъ значенія одной и той же величины. Но чаще она выражается вкратцѣ слѣдующимъ образомъ: діагональ и сторона квадрата несоизмѣримы.

Замѣчаніе 2-ое. Если два значенія одной величины несоизмѣримы одно съ другимъ, то не существуетъ ни такого цѣлаго числа, ни такой обыкновенной дроби, ни такой конечной десятичной дроби, ни, наконецъ, такой періодической десятичной дроби, которыя могли бы выразить отношеніе одного изъ этихъ значеній величины къ другому. Такъ, напр., не существуетъ ни цѣлаго числа, ни обыкновенной дроби, ни конечной десятичной дроби, ни, наконецъ, такой періодической десятичной дроби, которыя могли бы выразить

отношеніе длины діагонали квадрата къ длинѣ его стороны. Ибо: еслибы такое число или обыкновенная дробь, или конечная десятичная или, наконецъ, періодическая десятичная дробь существовали, то діагональ квадрата и сторона его были бы соизмѣримы, чего быть не можетъ (лемма 9).

Допущеніе относительно несоизмѣримыхъ величинъ.—Относительно несоизмѣримыхъ значеній всякой величины дѣлается слѣдующее допущеніе: если два значенія нѣкоторой величины несоизмѣримы другъ съ другомъ, то допускается существованіе отвлеченнаго числа, которое, не будучи ни цѣлымъ числомъ, ни дробнымъ съ цѣлыми числителемъ и знаменателемъ, все-таки представляетъ собою отношеніе одного изъ этихъ значеній данной величины къ другому.—Въ существованіи такого числа сомнѣваться невозможно, хотя оно и не можетъ быть *выражено* ни въ видѣ цѣлаго числа, ни въ видѣ дробнаго съ цѣлыми числителемъ и знаменателемъ, ни въ видѣ десятичной періодической дроби.

Замѣчаніе. Ниже мы убѣдимся, что, напр., отношеніе длины діагонали квадрата къ длинѣ его стороны выражается нѣкоторою безконечною неперіодическою десятичною дробью, въ которой можно вычислить любое число десятичныхъ ея знаковъ.

Лемма 10. Если два значенія одной и той же величины несоизмѣримы одно съ другимъ, то отношеніе одного изъ нихъ къ другому несоизмѣримо съ отвлеченною единицею.

Доказательство. Пусть величины A и B несоизмѣримы; требуется доказать, что отношеніе A : B несоизмѣримо съ единицею.—*Для доказательства этого предположимъ, что это отношеніе соизмѣримо съ единицею; тогда это отношеніе* (лемма 8) равно отношенію какихъ либо двухъ опредѣленныхъ цѣлыхъ чиселъ m и n. Т. е. тогда $A : B = m : n$, гдѣ m и n суть *числа цѣлыя. Но въ* такомъ случаѣ величины A и B соизмѣримы, что противорѣчитъ условію. Стало-быть, отношеніе двухъ несоизмѣримыхъ величинъ несоизмѣримо съ единицею. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Если отношеніе двухъ значеній нѣкоторой величины равно отношенію двухъ значеній той же или другой величины, то эти отношенія либо оба соизмѣримы, либо оба несоизмѣримы съ единицею.—Дѣйствительно: если $A : B = M : N$, то эти отношенія либо оба должны быть соизмѣримы съ единицею, либо же оба съ единицею несоизмѣримы. Ибо въ противномъ случаѣ получилось бы, что *отношеніе* двухъ несоизмѣримыхъ величинъ равно числу *соизмѣримому* съ единицею, — чего быть не можетъ (лемма 10).

Опредѣленіе. Если двѣ величины находятся одна отъ другой въ такой зависимости, что отношеніе двухъ значеній одной изъ нихъ равно отношенію двухъ соотвѣтствующихъ значеній другой изъ нихъ, то такія двѣ величины называются *пропорціональными*. Таковы, напр., количество товара и стоимость этого количества товара, или пространство, проходимое тѣломъ при равномѣрномъ движеніи, и количество времени, употребленное тѣломъ на прохожденіе этого пространства, и т. п.

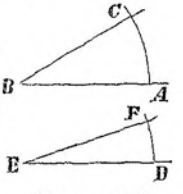
Теорема 119. Если даны два центральныхъ угла и ихъ дуги, описанныя однимъ и тѣмъ же радіусомъ, то отношеніе этихъ угловъ равно отношенію ихъ дугъ, т. е. центральный уголъ пропорціоналенъ своей дугѣ.

Доказательство. При доказательствѣ этой теоремы обыкновенно различаютъ два случая: 1) когда дуги соизмѣримы, и 2) когда онѣ несоизмѣримы. Пусть (черт. 128) даны два центральныхъ угла ABC и DEF и пусть дуги AC и DF описаны однимъ и тѣмъ же радіусомъ.

1-ый случай. Пусть дуги эти соизмѣримы; это значитъ, что существуетъ нѣкоторая такая дуга a, которая въ каждой изъ дугъ AC и DF содержится цѣлое число разъ; пусть при этомъ

$$\smile AC = \smile a \,.\, p, \quad \text{и} \quad \smile DF = \smile a \,.\, q,$$

откуда (аксіома 13) $\smile AC : \smile DF = p : q$.



Черт. 128.

Раздѣливъ дугу AC на p равныхъ между собою частей, а дугу DF на q равныхъ между собою частей (изъ которыхъ каждая равна дугѣ a), соединимъ всѣ точки дѣленія дуги AC съ вершиною угла ABC, а точки дѣленія дуги DF—съ вершиною угла DEF; такимъ образомъ мы раздѣлимъ $\angle$ ABC на p равныхъ между собою частей, а $\angle$ DEF на q равныхъ частей (теорема 108). Обозначивъ каждую изъ этихъ частей знакомъ $\angle a$, получимъ:

$$\angle ABC = \angle a \,.\, p,$$

а

$$\angle DEF = \angle a \,.\, q,$$

откуда (аксіома 13)

$$\angle ABC : \angle DEF = p : q.$$

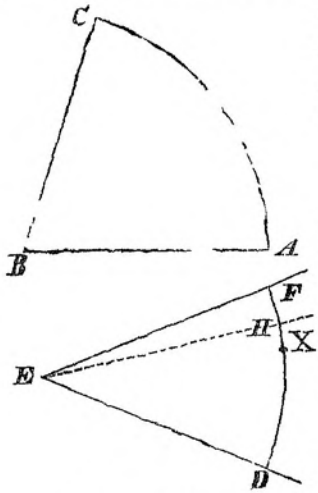
Выше мы видѣли, что

$$\smile AC : \smile DF = p : q;$$

слѣдовательно (аксіома 6), $\angle ABC : \angle DEF = \smile AC : \smile DF$, т. е. отношеніе угловъ ABC и DEF равно отношенію дугъ AC къ DF. Что и требовалось доказать.

2-ой случай. Пусть (черт. 129) дуги AC и DF несоизмѣримы; (углы ABC и DEF въ такомъ случаѣ тоже несоизмѣримы, согласно слѣдствію леммѣ 10). Это значитъ, что никакая доля дуги DF не помѣщается въ дугѣ AC цѣлаго числа разъ; требуется доказать, что, несмотря на это, все-таки

$$\angle ABC : \angle DEF = \smile AC : \smile DF.$$



Черт. 129.

Для доказательства этого предположимъ, что это равенство несправедливо и что, стало-быть, для обращенія его въ равенство справедливое необходимо измѣнить одинъ изъ его членовъ. Пусть для этого требуется вмѣсто дуги DF взять какую-нибудь дугу DX, т. е. пусть

$$\angle ABC : \angle DEF = \smile AC : \smile DX.$$

Дуги AC и DX должны быть несоизмѣримы одна съ другой (*слѣдствіе леммы* 10). Раздѣлимъ дугу AC на такія равныя между собою части, чтобы каждая изъ нихъ была меньше дуги XF, и отложимъ такую часть въ дугѣ DF, начиная отъ точки D, по направленію къ точкѣ F. Дуга DX не можетъ содержать въ себѣ эту часть цѣлое число разъ (слѣдствіе леммы 10). Стало-быть, при наложеніи сказанной части дуги AC на дугу DX получается остатокъ, меньшій чѣмъ эта часть дуги AC. Отложимъ эту часть еще одинъ разъ; тогда вторая крайняя точка этой части (такъ какъ эта часть менѣе дуги XF) совпадетъ съ нѣкоторою точкою H, лежащею между точками X и F. Соединивъ точку H съ точкою B, получимъ центральный уголъ DEH, и такъ какъ $\smile$ DH соизмѣрима съ дугою AC, то, по доказанному,

$$\angle ABC : \angle DEH = \smile AC : \smile DH;$$

но, по нашему предположенію:

$$\angle ABC : \angle DEF = \smile AC : \smile DX.$$

Разсматривая эти двѣ пропорціи, видимъ, что предыдущіе члены этихъ пропорцій равны между собою, а потому изъ послѣдующихъ можетъ быть составлена слѣдующая пропорція:

$$\angle DEH : \angle DEF = \smile DH : \smile DX.$$

Но эта пропорція невозможна, такъ какъ первое отношеніе менѣе единицы, а второе болѣе единицы. Подобная же нелѣпость получилась бы также и тогда, еслибы мы вмѣсто того измѣненія, которое мы сдѣлали въ пропорціи

$$\angle ABC : \angle DEF = \smile AC : \smile DF,$$

сдѣлали какое-либо другое измѣненіе; а въ такомъ случаѣ пропорція

$$\angle ABC : \angle DEF = \smile AC : \smile DF$$

ни въ какихъ измѣненіяхъ не нуждается. Стало-быть, и въ случаѣ несоизмѣримости дугъ AC и DF,

$$\angle ABC : \angle DEF = \smile AC : \smile DF.$$

Что и требовалось доказать.

Опредѣленія. *Градусомъ* называется $\frac{1}{360}$ доля окружности; $\frac{1}{60}$ градуса называется минутою, а $\frac{1}{60}$ минуты — секундою. Слова: градусъ, минута и секунда на письмѣ замѣняются особыми надстрочными значками, при чемъ слово *градусъ* замѣняется знакомъ ^{0}, слово *минута* знакомъ $'$ и слово *секунда* знакомъ $''$, такъ что, вмѣсто словъ: 135 градусовъ 15 минутъ и 37 секундъ, пишутъ: $135^0\ 15'\ 37''$. Величина данной дуги данной окружности обыкновенно выражается въ градусахъ и подраздѣленіяхъ градуса.

Теорема 120. Если вершину прямого угла принять за центръ какой-нибудь окружности произвольнаго радіуса, то дуга, заключенная между его сторонами, содержитъ въ себѣ 90^0.

Доказательство. Пусть (выполненіе чертежа предоставляется учащемуся) данный $\angle ABC$ — уголъ прямой и пусть какимъ-нибудь произвольнымъ радіусомъ BD описана окружность, центръ которой находится въ точкѣ B; требуется доказать, что дуга DE, заключенная между сторонами угла ABC, содержитъ въ себѣ 90^0. — Для доказательства этого продолжимъ прямую AB до пересѣченія ея съ окружностью въ точкѣ F и прямую CB до пересѣченія ея съ окружностью въ точкѣ G. Получимъ углы ABC, ABG, GBF и FBE, которые всѣ равны между собою (теорема 6). Но равнымъ центральнымъ угламъ соотвѣтствуютъ и равныя дуги (теорема 109); слѣдовательно:

$$\smile DE = \smile EF = \smile FG = \smile GD;$$

это значитъ, каждая изъ нихъ составляетъ четверть окружности. Стало-быть, въ дугѣ DE, описанной произвольнымъ радіусомъ, 90^0. Что и требовалось доказать.

Опредѣленіе. *Угловымъ градусомъ* называется уголъ, составляющій $\frac{1}{90}$ долю прямого угла, т. е. такой центральный уголъ, которому соотвѣтствуетъ дуга въ 1^0; поэтому прямой уголъ называютъ угломъ въ 90^0, выпрямленный же — угломъ въ 180^0; вогнутый уголъ, образованный двумя взаимно-перпендикулярными линіями, выходящими изъ одной точки, — угломъ въ 270^0: уголъ, образованный двумя прямыми, выходящими изъ одной точки въ одномъ

и томъ же направленіи, называется угломъ въ 0^0 или же угломъ въ 360^0, смотря по тому, идетъ ли рѣчь объ углѣ, меньшемъ, чѣмъ 90^0, или же объ углѣ полномъ. Градусъ дуги, т. с. $\frac{1}{360}$ доля окружности, въ отличіе отъ углового градуса, нѣкоторые авторы называютъ *дуговымъ градусомъ*.

Теорема 121. Въ центральномъ углѣ столько же угловыхъ градусовъ, сколько въ его дугѣ—дуговыхъ.

Доказательство. Пусть данъ центральный уголъ ABC и дуга его AC; требуется доказать, что въ этомъ углѣ столько же угловыхъ градусовъ, сколько въ его дугѣ дуговыхъ.—Для доказательства этого обозначимъ угловой градусъ знакомъ $\angle 1^0$, а градусъ дуги знакомъ $\smile 1^0$; на основаніи теоремы 119 имѣемъ пропорцію:

$$\angle ABC : \angle 1^0 = \smile AC : \smile 1^0,$$

которая именно и выражаетъ, что во всякомъ центральномъ углѣ столько угловыхъ градусовъ, сколько въ соотвѣтствующей ему дугѣ дуговыхъ. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе 1-ое. Какъ бы великъ радіусъ ни былъ, число градусовъ, заключающихся въ дугѣ, соотвѣтствующей данному центральному углу, остается одно и то же. Измѣняется при этомъ только величина дуги, соотвѣтствующей въ данномъ случаѣ каждому радіусу; но величина дуги въ этомъ случаѣ на число градусовъ ея не вліяетъ.

Замѣчаніе 2-ое. Теорему 121 обыкновенно выражаютъ короче, говоря, что *всякій центральный уголъ измѣряется своею дугою*, или еще короче: *центральный уголъ равенъ своей дугѣ*. Но подъ этими *сокращенными выраженіями* разумѣютъ только то, что выражается теоремою 121. Въ этомъ же смыслѣ должно понимать и равенства, подобныя слѣдующему:

$$\angle ABC = \smile MN,$$

которыя выражаютъ только то, что *число* (отвлеченное) угловыхъ градусовъ даннаго угла ABC равно (отвлеченному же) *числу* дуговыхъ градусовъ данной дуги MN. Такъ какъ мы въ этомъ случаѣ имѣемъ дѣло съ отвлеченными числами, то надъ равенствами подобнаго рода производятся всѣ тѣ преобразованія, которыя вообще дозволительны, когда мы имѣемъ дѣло съ равенствами.

Опредѣленія. Уголъ, образованный двумя хордами одной и той же окружности, выходящими изъ одной точки ея, называется *вписаннымъ*. Уголъ, образованный двумя касательными прямыми линіями, выходящими изъ одной точки, лежащей внѣ окружности, но въ одной съ нею плоскостью, называется *описаннымъ*.

Лемма 11. Если двѣ дуги окружности заключены между двумя параллельными прямыми, то эти дуги равны между собою.

Доказательство. При доказательствѣ этой теоремы различаются слѣдующіе случаи: 1) когда обѣ параллельныя прямыя суть хорды, лежащія по одну сторону центра; 2) когда обѣ параллельныя прямыя суть хорды, лежащія по разныя стороны центра, 3) когда одна изъ нихъ есть хорда, а другая — касательная, лежащая по ту же сторону центра; 4) когда одна изъ нихъ есть хорда, а другая - касательная, лежащая по другую сторону центра, и 5) когда обѣ параллельныя прямыя суть касательныя.

1-ый и 2-ой случаи. Пусть (черт. 130) хорды AB и CD лежатъ по одну сторону центра O. а CD и EF по разныя стороны; требуется доказать, что $\smile AC = \smile BD$ и что $\smile CE = \smile DF$. Для доказательства этого проведемъ діаметръ, перпендикулярный къ одной изъ этихъ прямыхъ: этотъ діаметръ перпендикуляренъ къ остальнымъ параллельнымъ линіямъ (теорема 31) и разсѣкаетъ какъ хорды, такъ и соотвѣтствующія имъ дуги пополамъ (теорема 114). Вслѣдствіе этого

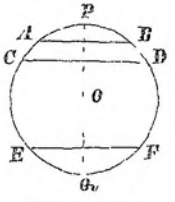
$$\smile CP = \smile DP, \text{ а } \smile AP = \smile BP;$$

вычтя изъ равныхъ величинъ поровну, найдемъ

$$\smile CP - \smile AP = \smile DP - \smile BP,$$

или

$$\smile CA = \smile DB.$$



Черт. 130.

Точно также получимъ

$\smile PD = \smile PC$, а $\smile FQ = \smile EQ$;

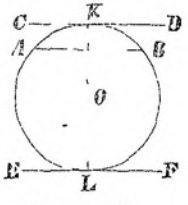
вычтя PD и FQ изъ одной полуокружности, а PC и EQ изъ другой, получимъ, что $\smile CE = \smile DF$; т. е. какъ-бы ни лежали параллельныя между собою хорды, дуги, заключенныя между ними, равны между собою. Что и требовалось доказать.

3-и и 4-й случаи. Пусть (черт. 131) хорда AB параллельна касательной CD и касательной EF; требуется доказать, что

$$\smile AK = \smile BK \text{ и } \smile AL = \smile BL.$$

Для доказательства этого соединимъ точку касанія K съ центромъ O; радіусъ KO перпендикуляренъ къ касательной CD (теорема 79), а потому онъ также перпендикуляренъ къ хордѣ AB (теорема 31). Такимъ образомъ получимъ (теорема 114), что

$$\smile KA = \smile KB.$$



Черт. 131.

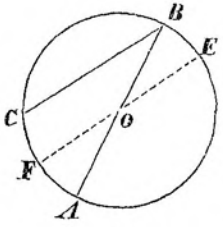
Соединимъ теперь точку O съ точкою L; прямая OL перпендикулярна къ прямой EF (теорема 79), но EF параллельна прямой AB, слѣдовательно, OL ⊥ AB (теорема 31), а потому $\smile AL = \smile BL$. Такимъ образомъ мы получили, что дуги одной и той же окружности, заключенныя между ея хордою и касательною, гдѣ бы центръ ни лежалъ, равны между собою. Что и требовалось доказать.

5-й случай. Пусть прямыя AB и CD обѣ суть касательныя къ окружности, центръ которой въ точкѣ O и пусть эти касательныя параллельны одна другой; требуется доказать, что точки касанія E и F раздѣляютъ окружность пополамъ, т. е. что онѣ суть концы діаметра.—Для доказательства этого (выполненіе чертежа предоставляется учащемуся) соединимъ точку O съ точкою касанія E. Прямая OE перпендикулярна къ AB (теорема 79). Продолжимъ прямую EO; это продолженіе перпендикулярно къ прямой CD (теорема 31). Слѣдовательно, оно должно пройти чрезъ точку касанія F (теорема 81). Такимъ образомъ прямая EF есть діаметръ и дѣлитъ въ точкахъ E и F окружность пополамъ (теорема 104). Стало-быть, дуги, заключенныя между параллельными касательными, равны между собою. Что и требовалось доказать.

Теорема 122. Вписанный въ окружность уголъ измѣряется половиною дуги, заключенной между его сторонами.

Доказательство. При доказательствѣ этой теоремы различаются три случая: 1) когда центръ лежитъ на одной изъ сторонъ его, 2) когда центръ лежитъ между его сторонами, и 3) когда центръ лежитъ внѣ его сторонъ. Во всѣхъ этихъ случаяхъ вписанный уголъ измѣряется половиною дуги, заключенной между его сторонами. 1) Пусть (черт. 132) центръ O лежитъ на сторонѣ AB вписаннаго угла ABC; требуется доказать, что

$$\angle ABC = \frac{\smile AC}{2}.$$



Черт. 132.

Для доказательства этого чрезъ центръ O проведемъ прямую EF, параллельную хордѣ CB. При этомъ получимъ, что

$$\smile CF = \smile BE \text{ (лемма 11)}$$
$$\smile FA = \smile BE \text{ (теорема 13 и 109):}$$

слѣдовательно:

$$\smile CF = \smile FA \text{ (аксіома 6).}$$

Но $\smile CF + \smile FA = \smile AC$; слѣдовательно:

$$\smile FA = \frac{\smile AC}{2}$$

Такъ какъ $\angle ABC = \angle AOF$ (теорема 30), а $\angle AOF = \smile FA$, то $\angle ABC = \smile FA$ (аксіома 6), или $\angle ABC = \frac{\smile AC}{2}$. Что и требовалось доказать.

2) Пусть (черт. 133) центръ O данной окружности находится между сторонами вписаннаго угла ABC; требуется доказать, что

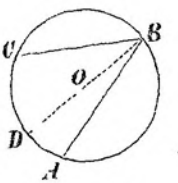
$$\angle ABC = \frac{\smile AC}{2}.$$

Для доказательства этого проведемъ діаметръ BD. Тогда по предыдущему,

$$\angle ABD = \frac{\smile AD}{2},$$

а

$$\angle DBC = \frac{\smile DC}{2};$$



Черт. 133.

сложивъ эти равенства почленно (аксіома 8), получимъ:

$$\angle ABC = \frac{\smile AD}{2} + \frac{\smile DC}{2} = \frac{\smile AC}{2}.$$

Что́ и требовалось доказать.

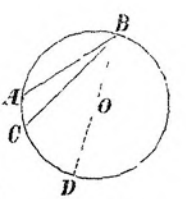
3) Пусть (черт. 134) центръ окружности лежитъ внѣ сторонъ вписаннаго угла ABC; требуется доказать, что

$$\angle ABC = \frac{\smile AC}{2}.$$

Для доказательства этого проведемъ діаметръ BD. Тогда по предыдущему

$$\angle ABD = \frac{\smile AD}{2},$$

$$\angle CBD = \frac{\smile CD}{2};$$



Черт. 134.

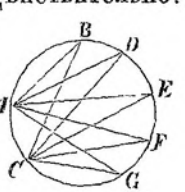
вычитая члены второго равенства изъ членовъ перваго (аксіома 8), получимъ

$$\angle ABC = \frac{\smile AD}{2} - \frac{\smile CD}{2} = \frac{\smile AC}{2}.$$

Что́ и требовалось доказать.

Стало-быть, вписанный уголъ, каково бы ни было положеніе центра окружности относительно сторонъ его, измѣряется половиною дуги, заключенною между его сторонами. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1-ое. Вписанные въ окружность углы, опирающіеся на одну и ту же дугу, равны между собою. — Дѣйствительно: каждый изъ этихъ вписанныхъ угловъ измѣряется половиною одной и той же дуги, т. е., всѣ эти углы содержатъ одно и то же число угловыхъ градусовъ. Такъ, напр., (черт. 135) углы ABC, ADC, AEC, AFC и AGC равны между собою.



Черт. 135.

Слѣдствіе 2-ое. Вписанный уголъ, между сторонами котораго заключается дуга, равная полуокружности, есть уголъ прямой.—Дѣйствительно: вписанный уголъ,

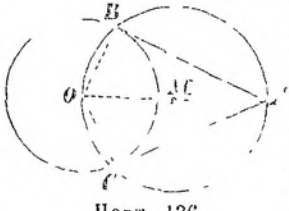
между сторонами котораго заключается дуга, равная полуокружности, измѣряется половиною полуокружности, т. е. содержитъ въ себѣ 90 угловыхъ градусовъ.

Замѣчаніе 1-ое. Эту теорему обыкновенно выражаютъ такъ: вписанный уголъ, опирающійся на діаметръ, *есть уголъ прямой.*

Замѣчаніе 2-ое. Основываясь на теоремѣ 122, можно всякій уголъ раздѣлить пополамъ, сдѣлавъ данный уголъ центральнымъ и вписавъ въ ту же окружность уголъ, опирающійся на дугу даннаго угла.

Задача 28. Изъ точки A, взятой внѣ окружности, но въ одной съ нею плоскости, провести къ этой окружности касательную прямую (черт. 28).

Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи соединимъ точку A съ центромъ O данной окружности, прямую OA въ точкѣ M раздѣлимъ пополамъ и радіусомъ равнымъ прямой MA опишемъ окружность. Эта окружность пересѣчетъ данную въ двухъ точкахъ A и C (почему?). Соединивъ точку A съ точками B и C, получимъ двѣ касательныя къ окружности прямыя AB и AC (почему?).



Черт. 136.

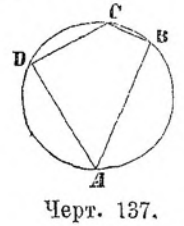
Опредѣленіе. Многоугольникъ, котораго вершины лежатъ на окружности, называется *вписаннымъ многоугольникомъ.*

Теорема 123. Если данный выпуклый четыреугольникъ вписанный, то сумма двухъ угловъ его, не прилежащихъ къ одной и той же сторонѣ его, равна $2d$.

Доказательство. Пусть (черт. 137) четыреугольникъ ABCD четыреугольникъ вписанный; требуется доказать, что

$$\angle B + \angle D = 2d.$$

Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что, напр.,



Черт. 137.

$$\angle B = \frac{\smile ADC}{2},$$

а

$$\angle D = \frac{\smile CBA}{2},$$

сложивъ эти равенства почленно (аксіома 8), получимъ

$$\angle B + \angle D = \frac{\smile ADC + \smile CBA}{2}.$$

Но $\smile ADC + \smile CBA$ равна всей окружности и содержитъ въ себѣ 360^0. Слѣдовательно сумма угловъ B и D содержитъ 180 угловыхъ градусовъ, т. е. $\angle B + \angle D = 2d$. Что и требовалось доказать.

Теорема 124 (обратная теоремѣ 123). Если сумма двухъ, не прилежащихъ къ одной и той же сторонѣ, угловъ четыреугольника равна $2d$, то всѣ четыре вершины этого четыреугольника лежатъ на одной и той же окружности.

Доказательство этой теоремы можетъ быть поведено, на основаніи предыдущей теоремы, леммы 5-ой и слѣдствія теоремы 46, способомъ приведенія къ нелѣпости и предоставляется учащемуся.

Теорема 125. Если изъ точки, взятой на окружности, проведены хорда и касательная, то острый уголъ, ими образованный, измѣряется половиною меньшей дуги, а тупой уголъ—половиною большей дуги, стягиваемой хордою.

Доказательство. Пусть (черт. 138) касательная BC образуетъ съ хордою BA острый уголъ, а касательная BC (черт. 139) съ хордою BA—тупой уголъ; требуется доказать, что

$$\text{острый } \angle ABC = \frac{\smile ANB}{2}, \quad \text{а тупой } \angle ABC = \frac{\smile AMB}{2}.$$

Для доказательства этого (черт. 138) проведемъ прямую AM параллельно касательной BC. Приэтомъ

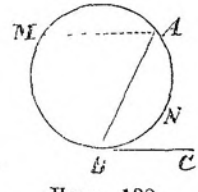
$$\angle ABC = \angle BAM \text{ (теорема 30)},$$

$$\text{а} \quad \angle BAM = \frac{\smile MB}{2} \text{ (теорема 122)}$$

$$\text{но} \quad \frac{\smile MB}{2} = \frac{\smile ANB}{2} \text{ (лемма 11)};$$

слѣдовательно (аксіома 5)

$$\angle ABC = \frac{\smile ANB}{2}.$$



Черт. 138.

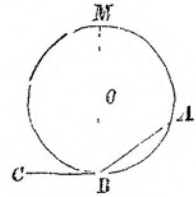
Такимъ образомъ первая половина теоремы доказана.—Для доказательства второй половины, проведемъ (черт. 139) изъ точки B перпендикуляръ къ касательной, который пройдетъ чрезъ центръ (теорема 80); тогда

тупой $\angle ABC = d + \angle ABM$; но

$$d = \frac{\text{полуокружности } BM}{2}, \text{ а } \angle ABM = \frac{\smile AM}{2};$$

поэтому (аксіома 5)

$$\text{тупой } \angle ABC = \frac{\text{полуокр.} + \smile AM}{2} = \frac{\smile BMA}{2}.$$



Черт. 139.

Стало-быть,

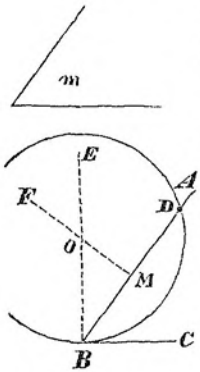
$$\text{острый } \angle ABC = \frac{\smile ANB}{2}, \quad \text{а тупой } \angle ABC = \frac{\smile AMB}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

Опредѣленіе. *Дугою, вмѣщающею данный уголъ*, называется дуга окружности, на которую опирается вписанный въ ту же окружность уголъ, равный данному.

Задача 29. Найти дугу, вмѣщающую данный уголъ m.

Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи начертимъ уголъ ABC, равный углу m; отложимъ на прямой AB отъ точки B какой-нибудь отрѣзокъ BD, изъ середины M прямой BD проведемъ къ BD перпендикуляръ MF; кромѣ того изъ вершины угла ABC къ прямой BC проведемъ перпендикуляръ BE. Перпендикуляры MF и BF должны пересѣчься (теорема 41) въ нѣкоторой точкѣ O. Соединивъ точку O съ точкою A, радіусомъ OB опишемъ дугу, которая пройдетъ чрезъ точку D (почему?).



Черт. 140.

Дуга BD и есть дуга, вмѣщающая данный уголъ M.—Для того чтобы въ этомъ убѣдиться, примемъ во вниманіе, что (теорема 125)

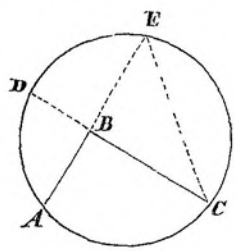
$$\angle ABC = \frac{\smile AD}{2}.$$

Но всякій вписанный въ полученную окружность уголъ, опирающійся на дугу BD, измѣряется половиною той же дуги AD; стало-быть, всякій вписанный уголъ, опирающійся на эту дугу, равенъ углу ABC, т. е. равенъ $\angle m$. Въ чемъ и надлежало убѣдиться.

Теорема 126. Если вершина угла лежитъ внутри круга, то онъ измѣряется полусуммою дугъ, заключенныхъ между его сторонами и ихъ продолженіями.

Доказательство. Пусть (черт. 141) вершина B угла ABC лежитъ внутри круга, пусть BE и BD продолженія его сторонъ; требуется доказать, что

$$\angle ABC = \frac{\smile AC + \smile DE}{2}.$$



Черт. 141.

Для доказательства этого соединимъ точку E съ точкою C. Получимъ $\triangle$ BEC, въ которомъ

$\angle ABC = \angle BEC + \angle BCE$ (теорема 46); но

$$\angle BEC = \frac{\smile AC}{2}, \text{ а } \angle BCE = \frac{\smile DE}{2},$$

слѣдовательно (аксіома 5):

$$\angle ABC = \frac{\smile AC}{2} + \frac{\smile DE}{2} = \frac{\smile AC + \smile DE}{2}.$$

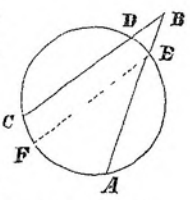
Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Доказательство этой теоремы съ помощью параллельныхъ линій сложнѣе, такъ какъ требуетъ изслѣдованія двухъ случаевъ: когда прямая EF есть хорда, и когда она касательная (что̀ равно возможно). А потому такому пріему доказательства предпочтенъ другой, который съ успѣхомъ можетъ быть приложенъ и ко всѣмъ остальнымъ теоремамъ объ измѣреніи угловъ, образованныхъ прямыми, проведенными въ кругѣ. Учащемуся предлагается теоремы 122, 125, 127, 128 и 129 доказать съ помощью внѣшняго угла треугольника.

Теорема 127. Если вершина угла лежитъ внѣ окружности, а стороны его суть сѣкущія, то онъ измѣряется полуразностью дугъ, заключенныхъ между его сторонами.

Доказательство. Пусть (черт. 142) вершина B угла ABC лежитъ внѣ круга, а стороны его BA и BC суть сѣкущія; требуется доказать, что

$$\angle ABC = \frac{\smile AC - \smile DE}{2}.$$



Черт. 142.

Для доказательства этого изъ точки E проведемъ хорду EF, параллельную къ BA. Получимъ, что $\angle ABC = \angle FEA$ (теорема 30); но $\angle FEA = \frac{\smile FA}{2}$ (теорема 122), а $\frac{\smile FA}{2} = \frac{\smile AC - \smile CF}{2}$ (ибо $\smile FA = \smile AC - \smile CF$); но такъ какъ $\smile CF = \smile DE$ (лемма 11) то, стало-быть (аксіома 5):

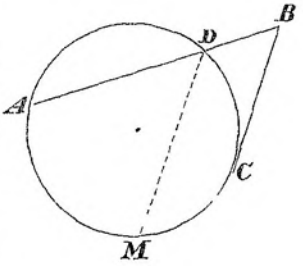
$$\angle ABC = \frac{\smile AC - \smile DE}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 128. Если вершина угла лежитъ внѣ круга и если одна изъ сторонъ его—сѣкущая, а другая—касательная къ окружности, то она измѣряется полуразностью дугъ, заключенныхъ между его сторонами.

Доказательство. Пусть (черт. 143) вершина B угла ABC лежитъ внѣ круга и пусть сторона BA сѣкущая, а сторона BC—касательная; требуется доказать, что

$$\angle ABC = \frac{\smile AC - \smile DC}{2}.$$



Черт. 143.

Для доказательства этого проведемъ хорду DM параллельную къ касательной; тогда получимъ

$$\angle ABC = \angle ADM \text{ (теорема 30);}$$

$$\angle ADM = \frac{\smile AM}{2} \text{ (теорема 122);}$$

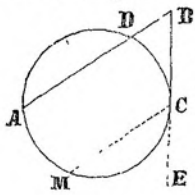
$$\frac{\angle AM}{2} = \frac{\smile AC - \smile MC}{2} \text{ (ибо } \smile AM = \smile AC - \smile MC\text{); но}$$

такъ какъ $\smile MC = \smile DC$ (лемма 11), то, стало-быть (аксіома 5)

$$\angle ABC = \frac{\smile AC - \smile DC}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Можно для доказательства той же теоремы провести параллельную къ сѣкущей изъ точки касанія (черт. 144); но тогда требуется продолжить касательную, и доказательство поэтому нѣсколько сложнѣе. Если же не продолжать касательную, то доказательство еще сложнѣе. Изслѣдованіе этихъ трудностей предоставляется учащемуся.



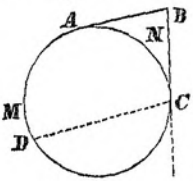
Черт. 144.

Теорема 129. Описанный уголъ измѣряется полуразностью дугъ, заключенныхъ между его сторонами.

Доказательство. Пусть уголъ ABC есть уголъ описанный, внутри котораго лежитъ окружность; требуется доказать, что

$$\angle ABC = \frac{\smile AMC - \smile ANC}{2}.$$

Для доказательства этого продолжимъ касательную BC по другую сторону точки C и проведемъ изъ точки C хорду CD, параллельную къ прямой AB. Получимъ, что



Черт. 145.

$$\angle ABC = \angle DCF \text{ (теорема 30);}$$

$$\angle DCF = \frac{\smile DC}{2} \text{ (теорема 129);}$$

$$\frac{\smile DC}{2} = \frac{\smile AMC - \smile AMD}{2}$$

(такъ какъ $\smile DC = \smile AMC - \smile AMD$); но

$\smile AMD = \smile ANC$ (лемма 11);

стало-быть (аксіома 5):

$$\angle ABC = \frac{\smile AMC - \smile ANC}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 130. Если вершину угла, описаннаго около данной окружности, соединить прямою съ центромъ ея, то эта прямая есть равподѣлящая даннаго описаннаго угла.

Доказательство основано на теоремѣ 66 и предоставляется учащемуся.

§ 10. О пропорціональныхъ прямыхъ и подобіи прямолинейныхъ фигуръ.

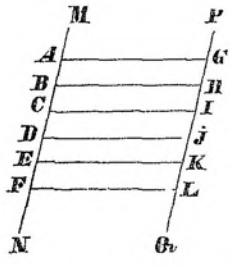
Опредѣленія. *Прямо пропорціональными* называются двѣ величины, находящіяся въ такой зависимости одна отъ другой, что, съ умноженіемъ какого-нибудь значенія одной изъ нихъ на какое-нибудь число, соотвѣтствующее значеніе другой величины умножается на то же самое число. Такъ, напр., центральный уголъ, при прочихъ одинаковыхъ условіяхъ, есть величина прямо-пропорціональная дугѣ его и обратно: дуга центральнаго угла, при прочихъ одинаковыхъ условіяхъ, величина прямо-пропорціональная углу. *Обратно-пропорціональными* называются величины, находящіяся въ такой зависимости одна отъ другой, что, съ умноженіемъ какого-нибудь значенія одной изъ нихъ на какое-нибудь число, соотвѣтствующее значеніе другой дѣлится на то же самое число. Ариѳметика намъ, въ ученіи о тройныхъ правилахъ, доставляетъ примѣры величинъ какъ прямо, такъ и обратно пропорціональныхъ; такъ, напр., продолжительность какой-либо работы и количество людей, ее выполняющихъ—обратно-пропорціональны, а стоимость любого количества товара и самое количество этого товара—величины прямо пропорціональныя.—Кромѣ того, если четыре значенія одной и той же величины представляютъ собою члены одной и той же геометрической пропорціи, то для краткости говорятъ, что эти значенія *пропорціональны*. Въ этомъ смыслѣ говорятъ, что числа: 4, 5, 8 и 10 пропорціональны, такъ какъ эти числа представляютъ собою члены слѣдующей геометрической пропорціи: $4 : 5 = 8 : 10$. Однако же въ этомъ послѣднемъ значеніи слово „пропорціональный“ употребляется только для краткости, и отнюдь не должно смѣшивать это значеніе слова съ тѣмъ значеніемъ его, которое имѣется въ виду, когда рѣчь идетъ о двухъ *пропорціональныхъ величинахъ*.

Лемма 12. Если двѣ прямыя лежатъ въ одной плоскости, если взять нѣсколько равноотстоящихъ другъ отъ друга точекъ на одной изъ нихъ и чрезъ эти точки провести параллельныя другъ другу прямыя, пересѣкающія и вторую изъ данныхъ прямыхъ въ нѣкоторыхъ точкахъ, то и эти послѣднія точки тоже равно отстоятъ другъ отъ друга.

Доказательство. Пусть (черт. 146 и 147) отрѣзки AB, BC, CD, DE, EF прямой MN равны между собою; пусть прямыя AG, BH, CI, DJ, EK, FL параллельны другъ другу; требуется доказать, что $DH = HI = IJ = JK = KL$. — Для доказательства этого

разсмотримъ два случая: 1) когда MN параллельна PQ и 2) когда MN не параллельна PQ. Въ первомъ случаѣ (черт. 146)

$$AB = GH,\ BC = IH \text{ и т. д. (теорема 70),}$$



Черт. 146.

а такъ какъ, по условію,

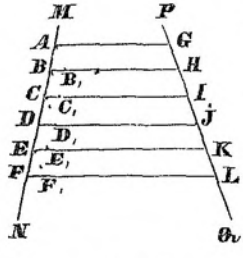
$$AB = BC \text{ и т. д.}$$

то (аксіома 6)

$$GH = HI = IJ \text{ и т. д.}$$

Что и требовалось доказать.—Во второмъ случаѣ, т. е когда MN и PQ другъ другу не параллельны, мы для доказательства (черт. 147) проведемъ изъ точки A линію AB_1 параллельно PQ, изъ точки B линію BC_1 параллельно PQ, изъ точки D линію CD_1 параллельно PQ и т. д. Получимъ рядъ треугольниковъ, которые всѣ равны между собою (теорема 30), а потому въ нихъ всѣ соотвѣтствующіе элементы тоже между собою равны, т е.

$$AB_1 = BC_1 = CD_1 = DE_1 = EF_1;$$



Черт. 147.

но (теорема 70)

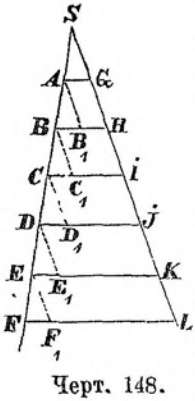
$$AB_1 = GH,\ BC_1 = HI,\ CD_1 = IJ \text{ и т. д.;}$$

стало-быть (аксіома 6),

$$GH = HJ = IJ = JK \text{ и т. д.}$$

Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Если на одну изъ сторонъ какого-нибудь угла отложить, считая отъ вершины, какой-нибудь отрѣзокъ неопредѣленное количество разъ и если провести изъ крайнихъ точекъ этихъ отрѣзковъ параллельныя другъ другу прямыя, пересѣкающія другую сторону угла, то эти параллельныя линіи отсѣкаютъ отъ второй стороны равные между собою отрѣзки. — Дѣйствительно: въ этомъ случаѣ можно сдѣлать то же самое построеніе, что и при доказательствѣ леммы 12 (см. черт. 148)



Черт. 148.

Задача 30. Раздѣлить конечную прямую на n равныхъ между собою частей, гдѣ буква n обозначаетъ число цѣлое.

Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи проведемъ прямую AC изъ конца A прямой AB подъ какимъ-нибудь острымъ угломъ CAB и отложимъ отъ точки A по прямой AC какую либо произвольную конечную прямую n разъ. Вторую точку M послѣдней (n-той) конечной прямой соединимъ съ точкою B прямой AB, а

изъ остальныхъ отмѣченныхъ крайнихъ точекъ отложенной конечной прямой проведемъ прямыя, параллельныя къ прямой MB.

Эти прямыя разсѣкутъ данную прямую AB на равныя между собою части (почему?).

Задача 31. Умножить данную прямую AB на дробь $\frac{m}{n}$, гдѣ буквы m и n обозначаютъ числа цѣлыя.

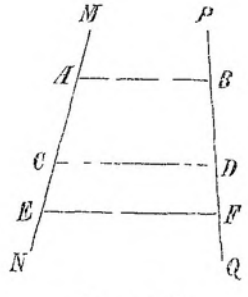
Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи раздѣлимъ прямую AB на n равныхъ между собою частей (задача 30), а полученную такимъ образомъ часть помножимъ на m (задача 4).

Полученная такимъ образомъ прямая и есть произведеніе прямой AB на дробь $\frac{m}{n}$. (Ср. замѣчаніе, которымъ снабжено рѣшеніе задачи 4).

Теорема 131. Три параллельныя прямыя, пересѣкая какія-нибудь двѣ прямыя, находящіяся въ той же плоскости, образуютъ въ каждой изъ нихъ два послѣдовательно лежащихъ отрѣзка, которыя вмѣстѣ съ двумя отрѣзками другой прямой, взятыми въ томъ же порядкѣ, представляютъ собою члены нѣкоторой геометрической пропорціи.

Доказательство. Пусть (черт. 149) даны двѣ прямыя MN и PQ, пусть прямыя AB, CD и EF параллельны другъ другу; требуется доказать, что

$$AC : CE = BD : DF.$$



Черт. 149.

При доказательствѣ этой теоремы примемъ во вниманіе, что MN и PQ могутъ быть либо параллельны другъ другу, либо же не параллельны. Если MN ∥ PQ, то (аксіома 13)

$$AC : CE = AC : CE;$$

по вставивъ (аксіома 5) во второе отношеніе вмѣсто конечной прямой AC равную ей (теорема 69) прямую BD, а вмѣсто прямой CE равную ей (теорема 69) прямую DF, получимъ, что

$$AC : CE = BD : DF.$$

Если же прямыя MN и PQ не параллельны, то при доказательствѣ теоремы различаютъ два случая: 1) когда конечныя прямыя BD и DF соизмѣримы одна съ другою и 2) когда онѣ несоизмѣримы.—Въ первомъ случаѣ существуетъ нѣкоторый отрѣзокъ a, который какъ въ BD, такъ и въ DF содержится цѣлое число разъ; пусть отрѣзокъ a въ BD содержится m разъ, а въ DF ровно n

разъ, при чемъ m и n числа цѣлыя. Раздѣливъ прямую BD на m равныхъ между собою частей, а прямую DF на n равныхъ между собою частей, чрезъ точки дѣленія проведемъ линіи параллельныя прямой AB. Такимъ образомъ мы разсѣчемъ линіи AC и CE на равныя между собою части, при чемъ AC будетъ разсѣчена на m равныхъ между собою частей, а CE—на n равныхъ между собою частей (лемма 12). Пусть каждая изъ этихъ частей прямыхъ AC и CE равна прямой b; тогда получимъ, что

$$AC = b \,.\, m,$$
$$CE = b \,.\, n,$$
$$BD = a \,.\, m,$$
$$DF = a \,.\, n;$$

откуда (аксіома 13)

$$AC : CE = m : n, \text{ а также } BD : DF = m : n,$$

т. е. (аксіома 6)

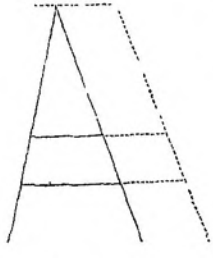
$$AC : CE = BD : DF.$$

Что и требовалось доказать. — Во второмъ случаѣ, т. е. когда прямыя AC и CE несоизмѣримы одна съ другою, равнымъ образомъ употребляется тотъ же пріемъ доказательства, который употребляется при доказательствѣ теоремы 119 объ отношеніи между центральными углами и ихъ дугами. Стало-быть, соизмѣримы ли или несоизмѣримы другъ съ другомъ отрѣзки AC и CE, во всякомъ случаѣ

$$AC : CE = BD : DF.$$

Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Если стороны угла пересѣчь двумя параллельными другъ другу прямыми, то конечныя прямыя, заключенныя между вершиною угла и одной изъ параллельныхъ линій, представляютъ собою предыдущіе, а прямыя, заключенныя между тою же вершиною съ другою изъ параллельныхъ линій — послѣдующіе члены нѣкоторой геометрической пропорціи. — Дѣйствительно: проведя (черт. 150) чрезъ вершину угла третью параллельную и еще одну прямую, параллельную къ одной изъ сторонъ угла, на основаніи теоремы 69, сведемъ вопросъ къ теоремѣ 131.



Черт. 150.

Замѣчаніе 1-ое. Изъ ариѳметики извѣстно, что въ геометрической пропорціи произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію ея среднихъ членовъ. Когда дана геометрическая пропорція

$$AC : CE = BD : DF,$$

гдѣ AC, CE, BD и DF обозначаютъ прямыя линіи, то равенство

$$AC \,.\, DF = CE \,.\, BD$$

обозначаетъ, что если отрѣзки AC, CE, BD и DF измѣрены одной и тою же единицею мѣры, то произведеніе отвлеченныхъ чиселъ, выражающихъ отношенія отрѣзковъ AC и DF къ этой единицѣ, равно произведенію отвлеченныхъ чиселъ, выражающихъ отношенія отрѣзковъ CE и BD къ той же единицѣ мѣры.

Замѣчаніе 2-ое. Три параллельныя другъ другу прямыя опредѣляютъ на двухъ прямыхъ, лежащихъ въ той же плоскости, четыре отрѣзка, представляющіе собою члены одной и той же пропорціи, и въ этой пропорціи отрѣзки, заключенные между одними и тѣми же параллельными линіями, представляютъ собою предыдущіе, а прямыя линіи, заключенныя между другими параллельными линіями—послѣдующіе члены пропорціи. Тѣмъ же пріемомъ, который употребленъ выше при доказательствѣ теоремы 131, можетъ быть доказана справедливость всѣхъ тѣхъ семи пропорцій, которыя могутъ быть получены изъ доказанной измѣненіемъ порядка членовъ, а равно справедливость производныхъ пропорцій (черт. 149):

$$AE : AC = BF : BD \quad \text{и} \quad AE : CE = BF : DF$$

и всѣхъ тѣхъ четырнадцати пропорцій, которыя могутъ быть получены изъ послѣднихъ двухъ должнымъ измѣненіемъ порядка ихъ членовъ.

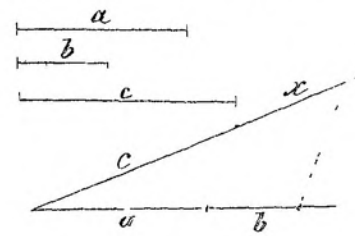
Замѣчаніе 3-е. Составляя пропорцію, должно соблюдать слѣдующее правило: первый отрѣзокъ первой прямой относится ко второму ея отрѣзку, какъ первый (считая въ томъ же направленіи) отрѣзокъ второй прямой ко второму ея отрѣзку, или же—первый отрѣзокъ первой прямой относится къ первому (считая въ томъ же направленіи) отрѣзку второй—какъ второй отрѣзокъ первой прямой ко второму второй.—Какая прямая при этомъ принята за первую, какая—за вторую, безразлично (замѣчаніе 2-ое).

Замѣчаніе 4-ое. Если разсмотрѣть двѣ конечныя прямыя AC и BD, образованныя при пересѣченіи двухъ прямыхъ MN и PQ двумя параллельными прямыми AB и CD, то легко убѣдиться, что, при прочихъ одинаковыхъ условіяхъ, прямая AC прямо-пропорціональна прямой BD, т. е. въ томъ, что еслибы вмѣсто BD была взята прямая BF, полученная изъ BD умноженіемъ BD на какое-нибудь число $\frac{m}{n}$, то вмѣсто AD получилась бы конечная прямая AE, представляющая собою произведеніе прямой AC на число $\frac{m}{n}$. То же самое справедливо и относительно отрѣзковъ, опредѣляемыхъ на сторонахъ угла прямою, ихъ пересѣкающею и подчиненною тому условію, что она должна быть параллельна нѣкоторой опредѣленной прямой.

Задача 32. Даны три прямыя a, b и c; требуется найти четвертую пропорціональную къ этимъ прямымъ линіямъ, т. е. такую прямую x, чтобы была справедлива слѣдующая пропорція:

$$a : b = c : x.$$

Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи (черт. 151) сложимъ на произвольной прямой отрѣзки a и b, проведемъ изъ начала отрѣзка a произвольную прямую подъ какимъ-нибудь острымъ угломъ, на этой прямой отложимъ отрѣзокъ c, соединимъ прямою конецъ отрѣзка a съ концомъ отрѣзка c и изъ конца отрѣзка b проведемъ прямую параллельно къ прямой, соединяющей концы отрѣзковъ a и c.



Черт. 151.

Отрѣзокъ x удовлетворяетъ требованію задачи, потому что (слѣдствіе теоремы 131) $a : b = c : x$.

Замѣчаніе. Учащемуся предоставляется разыскать иные способы нахожденія четвертой пропорціональной къ отрѣзкамъ a, b и c.

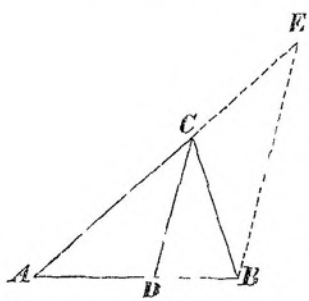
Теорема 132. Равнодѣлящая угла треугольника раздѣляетъ противолежащую этому углу сторону на части пропорціональныя остальнымъ двумъ сторонамъ.

Доказательство. Пусть (черт. 152) въ тр-кѣ ABC прямая CD есть равнодѣлящая угла C; требуется доказать, что

$$AD : DB = AC : BC.$$

Для доказательства этого продолжимъ какую-нибудь изъ остальныхъ двухъ сторонъ, напр., сторону AC по другую сторону вершины C, а изъ точки B проведемъ прямую BE до пересѣченія съ этимъ продолженіемъ въ точкѣ E. Тогда

$$AD : DB = AC : CE \text{ (слѣдствіе теоремы 131).}$$



Черт. 152.

Обозначимъ, для краткости, буквами m и n равные между собою части угла ACB, а буквами p и q — углы, прилежащіе въ треугольникѣ BCE по сторонѣ BE. По условію $\angle m = \angle n$. Но

$\angle m = \angle p$ (теорема 30) и

$\angle n = \angle q$ (теорема 30);

стало-быть,

$\angle q = \angle p$ (аксіома 6);

а потому (теорема 59)

$$CE = CB.$$

Но выше мы вывели пропорцію

$$AD : DB = AC : CE;$$

стало-быть (аксіома 5)

$$AD : DB = AC : CB.$$

Что и требовалось доказать.

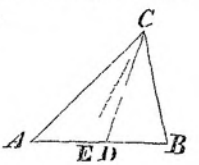
Теорема 133 (обратная теоремѣ 132) Если прямая, проведенная изъ вершины какого-нибудь угла треугольника, раздѣляетъ противолежащую ему сторону на части пропорціональныя остальнымъ двумъ сторонамъ треугольника, то эта прямая дѣлитъ этотъ уголъ пополамъ.

Доказательство. Пусть (черт. 153) прямая CD раздѣляетъ сторону AB такъ, что

$$AD : DB = AC : BC;$$

требуется доказать, что $\angle ACD = \angle DCB$.—Для доказательства этого предположимъ, что $\angle ACD$ не равенъ углу DCB. Въ такомъ случаѣ онъ либо больше, либо меньше его (аксіома 3). Предположимъ, что онъ больше его; тогда существуетъ нѣкоторая прямая CE, которая дѣлитъ $\angle ACB$ пополамъ (допущеніе относительно угловъ). А въ такомъ случаѣ

$$AE : EB = AC : BC \text{ (теорема 132);}$$



Черт. 153.

Но намъ дана пропорція

$$AD : DB = AC : BC;$$

сравнивъ ее почленно съ полученною пропорціею, увидимъ, что вторыя отношенія ихъ равны; а потому изъ первыхъ можетъ быть составлена пропорція:

$$AE : ED = AD : DB;$$

чего быть не можетъ, ибо числитель перваго отношенія меньше числителя второго, а знаменатель перваго больше знаменателя второго. Точно такъ же докажемъ, что $\angle ACD$ не меньше угла DCB. Стало-быть, $\angle ACD$ не больше и не меньше угла DCB; а потому (аксіома 3) $\angle ACD = \angle DCB$. Что́ и требовалось доказать.

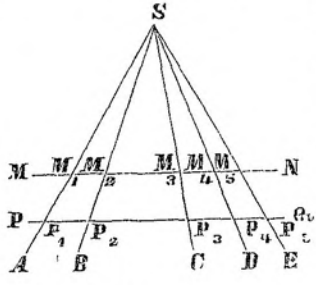
Теорема 134. Если изъ точки, взятой на плоскости, проведено нѣсколько прямыхъ, если, кромѣ того, проведены въ той же плоскости двѣ параллельныя линіи, пересѣкающія данныя прямыя, то можно составить рядъ равныхъ между собою отношеній, въ которыхъ предыдущими членами будутъ отрѣзки, заключенные между вершиною угла и одною изъ параллельныхъ линій, а послѣдующими—отрѣзки тѣхъ же прямыхъ, заключенные между обѣими параллельными прямыми.

Доказательство. Пусть (черт. 154) изъ точки S проведены прямыя SA, SB, SC, SD и SE; пусть, кромѣ того, прямыя MN и PQ параллельны другъ другу и пересѣкаютъ данныя прямыя въ точкахъ M_1, M_2, M_3, M_4 и M_5, а прямая PQ пересѣкаетъ тѣ же

прямыя въ точкахъ P_1, P_2, P_3, P_4 и P_5; требуется доказать, что

$$SM_1 : M_1P_1 = SM_2 : M_2P_2 = SM_3 : M_3P_3 \text{ и т. д.}$$

Для доказательства этого примемъ во вниманіе слѣдствіе изъ теоремы 131. На основаніи этого слѣдствія:



Черт. 154.

$$SM_1 : M_1P_1 = SM_2 : M_2P_2,$$

но

$$SM_2 : M_2P_2 = SM_3 : M_3P_3,$$

а

$$SM_3 : M_3P_3 = SM_4 : M_4P_4 \text{ и т. д.;}$$

стало-быть (аксіома 6)

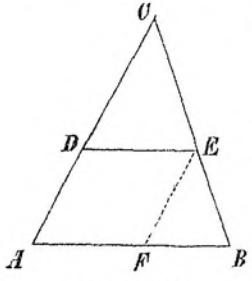
$$SM_1 : M_1P_1 = SM_2 : M_2P_2 = SM_3 : M_3P_3$$

и т. д. Что и требовалось доказать.

Теорема 135. Если стороны угла пересѣкаются двумя, заключенными между ними, конечными параллельными прямыми, то отношеніе меньшей изъ параллельныхъ къ большей равно отношенію той части одной изъ сторонъ угла, которая заключена между вершиною угла и меньшею изъ параллельныхъ, къ той ея части, которая заключена между вершиною угла и бо́льшею изъ параллельныхъ.

Доказательство. Пусть (черт. 155) стороны угла ACB пересѣкаются конечными параллельными прямыми DE и AB; требуется доказать, что

$$DE : AB = CE : CB.$$



Черт. 155.

Для доказательства этого проведемъ изъ точки E прямую EF, параллельную къ AC. Тогда (теорема 131 и замѣчаніе 3)

$$AF : AB = CE : CB.$$

Но $AF = DE$ (теорема 69); стало-быть,

$$DE : AB = CE : CB.$$

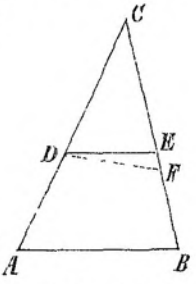
Что и требовалось доказать.

Теорема 136 (обратная слѣдствію теоремы 131). Если двѣ точки раздѣляютъ двѣ стороны треугольника на такія части, что отношеніе части, прилежащей къ вершинѣ угла, образованнаго этими сторонами, къ другой части той же стороны, равно отношенію прилежащей къ той же вершинѣ части другой стороны угла къ остальной ея части, то прямая, соединяющая эти двѣ точки, параллельна третьей сторонѣ треугольника.

Доказательство. Пусть (черт. 156) точки D и E раздѣляютъ стороны AC и BC на такія части, что

$$DC : DA = EC : EB;$$

требуется доказать, что прямая DE параллельна сторонѣ AB. — Для доказательства этого предположимъ, что прямая DE не параллельна сторонѣ AB. Въ такомъ случаѣ какая-нибудь другая прямая DF должна быть параллельна къ AB, а въ такомъ случаѣ (теорема 131)



Черт. 156.

$$DC : DA = FC : FB;$$

но по условію

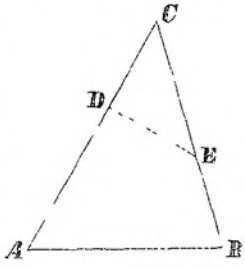
$$DC : DA = EC : EB,$$

стало-быть (аксіома 6)

$$FC : FB = EC : EB,$$

т. е. двѣ дроби, въ которыхъ числитель первой больше числителя второй, а знаменатель первой менѣе знаменателя второй, равны между собою. Чего быть не можетъ. Стало-быть, прямая DE должна быть параллельна сторонѣ AB. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе 1-ое. Если данныя двѣ точки D и E (черт. 156) взяты на двухъ сторонахъ треугольника такимъ образомъ, что, дѣля эти стороны на части пропорціональныя, однако расположены такъ, что



Черт. 157.

$$DA : DC = CE : BE,$$

то прямая DE вообще непараллельна прямой AC и можетъ быть ей параллельна только при нѣкоторыхъ особенныхъ условіяхъ. При какихъ именно — предоставляется изслѣдовать учащемуся. Если прямая дѣлитъ двѣ стороны треугольника на части пропорціональныя, но при этомъ не параллельна третьей сторонѣ его, то въ такомъ случаѣ прямыя DE и AC носятъ названіе *антипараллельныхъ линій.*

Замѣчаніе 2-ое. Теоремы 135 и 136 остаются справедливы также и въ случаѣ, если линію, параллельную одной изъ сторонъ тр-ка, провести изъ точки, взятой на продолженіи какой-нибудь изъ остальныхъ сторонъ, въ чемъ предоставляется убѣдиться учащемуся.

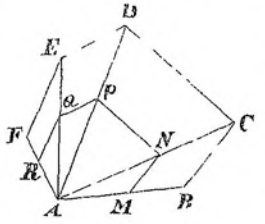
Теорема 137. Если изъ вершины одного изъ угловъ даннаго многоугольника провести всѣ діагонали этого многоугольника, затѣмъ на одной изъ сторонъ этого угла взять точку и изъ нея провести линію, параллельную слѣдующей сторонѣ многоугольника, до пересѣченія съ ближайшею діагональю, изъ этой точки пересѣченія провести параллельную третьей сторонѣ многоугольника до пересѣченія со второю діагональю, и т. д. до тѣхъ поръ, пока послѣдняя параллельная линія пересѣчетъ вторую сторону первоначально взятаго угла, то получится многоугольникъ, котораго углы порознь равны угламъ дан-

наго многоугольника, а стороны, заключенныя между вершинами равныхъ между собою порознь угловъ этихъ многоугольниковъ, пропорціопальны.

Доказательство. Пусть (черт. 158) данъ многоугольникъ ABCDEF, пусть изъ точки A проведены діагонали AC, AD и AE и пусть на сторонѣ AB взята точка M, изъ нея проведена прямая MN параллельно къ прямой BC, изъ точки N проведена прямая NP параллельно къ CD, изъ точки P прямая QP параллельно къ ED и, наконецъ, изъ точки Q прямая QR параллельно къ EF; требуется доказать, что въ полученномъ такимъ образомъ многоугольникѣ AMNPQR углы порознь равны угламъ *даннаго многоугольника* ABCDEF, а стороны, заключенныя между вершинами равныхъ между собою порознь угловъ многоугольника, пропорціональны.— Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что $\angle$ A въ обоихъ многоугольникахъ общій,

$$\angle M = \angle B, \text{ а } \angle R = \angle F;$$

но такъ какъ углы N, P и Q многоугольника AMNPQR и углы C, D и E многоугольника ABCDEF состоятъ изъ порознь равныхъ между собою частей (теорема 30), то въ нихъ



Черт. 158.

$$\angle N = \angle C,$$
$$\angle P = \angle D,$$
$$\angle Q = \angle E.$$

Такимъ образомъ первая половина теоремы доказана. Что касается пропорціопальности соотношенія сторонъ этихъ многоугольниковъ, то имѣемъ (теорема 135):

$AM : AB = MN : BC$; но $MN : BC = AN : AC$, а $AN : AC = NP : CD$; стало-быть,

$$AM : AB = MN : BC = NP : CD;$$

но

$$NP : CD = AP : AD, \text{ а } AP : AD = PQ : DE:$$

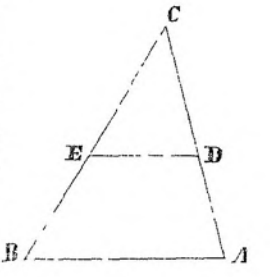
стало-быть,

$$AM : AB = MN : BC = NP : CD = PQ : DE \text{ и т. д.}$$

Что и требовалось доказать.

Опредѣленіе. Двѣ плоскія прямолинейныя фигуры, въ которыхъ углы одной, взятые въ нѣкоторомъ опредѣленномъ порядкѣ, порознь равны угламъ другой, взятымъ въ томъ же порядкѣ, а стороны, заключенныя между вершинами соотвѣтственно равныхъ между собою угловъ, пропорціональны, называются *подобными фи-*

гурами. Такъ (черт. 159), если DE || AB, то △ ACB подобенъ треугольнику DEC; въ предыдущей теоремѣ многоугольникъ ABCDEF подобенъ многоугольнику AMNPQR. Двѣ стороны двухъ подобныхъ многоугольниковъ, представляющія собою члены одного и того же отношенія, ихъ характеризующаго, называются *сходственными* или *соотвѣтственными*. Къ нимъ прилежатъ равные между собою углы подобныхъ фигуръ На письмѣ слово „подобенъ“ иногда замѣняется знакомъ ∞



Черт. 159.

Замѣчаніе. Теорема 137 доказываетъ, что подобныя прямолинейныя фигуры существуютъ.

Теорема 138. Если углы одного треугольника порознь равны угламъ другого, то стороны, образующія равные между собою углы, пропорціональны, т. е. треугольники подобны.

Доказательство. Пусть (черт. 116) въ треугольникахъ ABC и DEF ∠ A = D, ∠ B = ∠ E, а ∠ C = ∠ F; требуется доказать, что

$$AB : DE = AC : DF = BC : EF.$$

Для доказательства этого отложимъ на сторонѣ CA отъ точки C прямую CG, равную сторонѣ DF и изъ точки G проведемъ прямую GH параллельно къ AB. Получимъ (теоремы 131 и 135):

$$AB : GH = AC : GC = BC : HC.$$

Но

△ GHC = △ DEF (теорема 52):

слѣдовательно:

$$GH = DE,\ GC = DF,\ HC = EF:$$

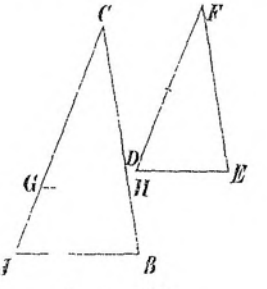
а въ такомъ случаѣ (аксіома 5):

$$AB : DE = AC : DF = BC : EF.$$

Стало быть,

△ ABC ∞ △ DEF.

Что и требовалось доказать.

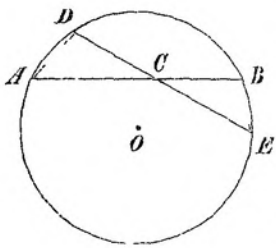


Черт. 160

Слѣдствіе 1-ое. Если два угла одного треугольника порознь равны двумъ угламъ другого, то треугольники подобны.— Дѣйствительно: если два угла одного треугольника порознь равны двумъ угламъ другого, то и третьи углы между собою тоже равны (слѣдствіе 5 теоремы 45).

Слѣдствіе 2-ое. Если одинъ изъ острыхъ угловъ прямоугольнаго треугольника равенъ острому углу другого прямоугольнаго треугольника, то эти треугольники подобны.— Дѣйствительно: въ этихъ треугольникахъ, кромѣ того, прямые углы между собою равны, и остальные острые углы тоже равны.

Слѣдствіе 3-е. Если чрезъ взятую внутри окружности точку провести двѣ хорды, то произведеніе обоихъ отрѣзковъ одной изъ нихъ, заключенныхъ между этою точкою и окружностью, равно произведенію отрѣзковъ другой изъ нихъ, заключенныхъ между тою же точкою и окружностью.—Дѣйствительно: если (черт. 161) черезъ точку C проведены двѣ хорды AB и DE, то, соединивъ точку A съ точкою D, а точку B съ точкою E, получимъ два треугольника, въ которыхъ углы одного порознь равны угламъ другого (слѣдствіе теоремы 122); но изъ подобія ихъ получаемъ пропорцію:



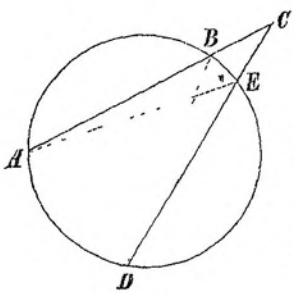
Черт. 161.

$$AC : CE = DC : CB, \text{ откуда } AC \cdot CB = CE \cdot CD.$$

Замѣчаніе 1-ое. Всмотрѣвшись въ пропорцію, изъ которой выведено это **замѣчательное** свойство частей хордъ, проходящихъ чрезъ одну и ту же точку внутри окружности, легко увидѣть, что въ ней часть *одной* хорды относится къ любой части *второй* хорды, какъ остальная часть *второй* относится къ остальной части *первой*. Это свойство отрѣзковъ двухъ, пересѣкающихся внутри окружности, хордъ заслуживаетъ вниманія.

Замѣчаніе 2-ое. Изъ выведеннаго выше равенства слѣдуетъ, что съ увеличеніемъ одного отрѣзка хорды, другой уменьшается, а съ уменьшеніемъ одного, другой увеличивается во столько же разъ. А въ такомъ случаѣ длина одного отрѣзка хорды, проходящей чрезъ одну и ту же точку, взятой внутри окружности, и длина другого ея отрѣзка суть величины обратно-пропорціональныя. Вотъ почему теорему, изложенную въ слѣдствіи третьемъ, можно формулировать такъ: хорды, пересѣкающіяся внутри окружности, дѣлятъ одна другую на части другъ другу обратно пропорціональныя.

Слѣдствіе 3-ое. Если изъ точки, взятой внѣ окружности, провести двѣ сѣкущія, то произведенія каждой изъ нихъ на ея внѣшнюю часть равны между собою.—Дѣйствительно: если (черт. 162) даны сѣкущія CA и CD, то, соединивъ точку A съ точкою E, а точку D съ точкою B, получимъ два треугольника ACE и DCB, въ которыхъ $\angle C$ общій, а $\angle A = \angle D$ (теорема 122); но изъ подобія этихъ треугольниковъ получаемъ пропорцію:



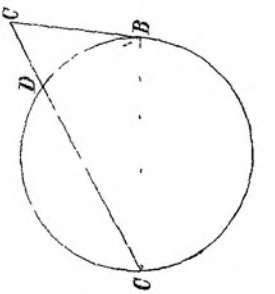
Черт. 162.

$$CA : CD = CE : CB, \text{ откуда}$$
$$CA \cdot CB = CD \cdot CE.$$

Замѣчаніе 1-ое. Всмотрѣвшись въ пропорцію, изъ которой выведено это **замѣчательное** свойство сѣкущихъ, проведенныхъ изъ точки, находящейся внѣ окружности, легко увидѣть, что въ этой пропорціи *первая* сѣкущая относится къ внѣшней части *второй* такъ, какъ *вторая* сѣкущая относится къ внѣшней части *первой*. Это свойство сѣкущей и ея внѣшняго отрѣзка заслуживаетъ вниманія.

Замѣчаніе 2-ое. Изъ выше выведеннаго равенства слѣдуетъ, что съ увеличеніемъ сѣкущей, внѣшняя ея часть уменьшается, а съ уменьшеніемъ сѣкущей, внѣшняя увеличивается во столько же разъ. А въ такомъ случаѣ длина сѣкущей и длина внѣшней ея части суть величины обратно-пропорціональныя. Вотъ почему предложеніе, выражаемое въ слѣдствіи 3-емъ, можно формулировать такъ: *сѣкущія, проведенныя изъ точки, взятой внѣ окружности, обратно-пропорціональны внѣшнимъ своимъ частямъ.*

Слѣдствіе 4-ое. Если изъ точки, взятой внѣ окружности, провести сѣкущую и касательную, то касательная есть средняя пропорціональная между всею сѣкущею и ея внѣшнимъ отрѣзкомъ.—Дѣйствительно: если (черт. 163) CA есть сѣкущая, а CB касательная, то, соединивъ точку A съ точкою B, а точку B съ точкою D, получимъ два треугольника ABC и DBC, въ которыхъ $\angle C$ общій, а $\angle CAB = \angle DBC$ (теорема 122 и 124) Но изъ подобія этихъ треугольниковъ получаемъ пропорцію:



Черт. 163.

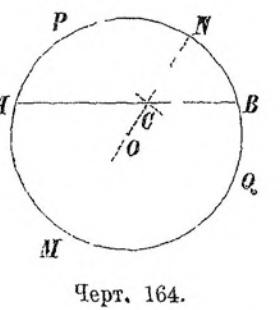
$$CA : CB = CB : CD.$$

Замѣчаніе 1-ое. Эту **замѣчательную** теорему иногда выражаютъ такъ: произведеніе сѣкущей на ея внѣшнюю часть равно квадрату касательной, проведенной изъ той же точки къ той же окружности. На ней основано рѣшеніе задачи 33.

Замѣчаніе 2-ое. Произведеніе частей хорды проходящей чрезъ данную точку внутри окружности (слѣдствіе 2-ое) есть величина постоянная. Учащемуся, въ качествѣ весьма полезнаго упражненія предлагается, доказать, что (черт. 164)

$$AC \cdot CB = CP^2,$$

если $CP \perp MN$, и MN діаметръ, проходящій чрезъ данную точку, а также формулировать словами это предложеніе.



Черт. 164.

Опредѣленіе. *Раздѣлить какую-нибудь величину въ среднемъ и крайнемъ отношеніи* значитъ раздѣлить ее на такія двѣ части,

чтобы бо́льшая изъ нихъ была среднею пропорціональною между всею величиною и меньшею ея частью. Если данная величина равна a, то раздѣлить величину a въ среднемъ и крайнемъ отношеніи значитъ, стало-быть, найти такую часть ея x, чтобы пропорція

$$a : x = x : (a - x)$$

была справедлива.

Замѣчаніе. Съ точки зрѣнія алгебраической, эта пропорція приводитъ къ квадратному уравненію

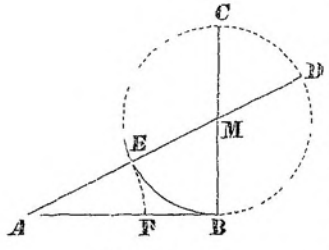
$$x^2 + ax - a^2 = 0,$$

которое, согласно ученію о квадратныхъ уравненіяхъ съ одною неизвѣстною, имѣетъ два вещественныхъ корня:

$$x_1 = \frac{a \cdot (-1 + \sqrt{5})}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{a \cdot (-1 - \sqrt{5})}{2}.$$

Задача 33. Раздѣлить данную конечную прямую AB въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи поступаютъ слѣдующимъ образомъ (черт. 165): изъ конца B данной конечной прямой AB проводятъ къ этой прямой перпендикуляръ и на этомъ перпендикулярѣ, отъ точки B, откладываютъ прямую BC, равную данной прямой AB; потомъ прямую BC дѣлятъ пополамъ въ точкѣ M, точку M принимаютъ за центръ, а прямую MB за радіусъ нѣкоторой окружности; затѣмъ точку A соединяютъ съ центромъ M; пусть точка E есть точка пересѣченія прямой AM съ окружностью. Наконецъ, прямую AE откладываютъ отъ точки A на прямую AB такъ, чтобы прямая AF равнялась прямой AE.



Черт. 165.

Тогда прямая AB въ точкѣ F раздѣлена въ среднемъ и крайнемъ отношеніи и притомъ такъ, что

$$AB : AF = AF : EB.$$

Для того, чтобы въ этомъ убѣдиться, продолжимъ прямую AM до второго пересѣченія ея съ окружностью въ точкѣ D и разсмотримъ фигуру DAB, въ которой касательная AB есть средняя пропорціональная между всею сѣкущею и ея внѣшнею частью (слѣдствіе 4 теоремы 138), т. е.:

$$AD : AB = AB : AE.$$

Образуемъ изъ этой пропорціи слѣдующую производную пропорцію:

$$(AD - AB) : AB = (AB - AE) : AE;$$

но

$$AD - AB = AD - ED = AE = AF \text{ (аксіома 5)};$$

кромѣ того,

$$AB - AE = AB - AF = FB \text{ (аксіома 5)};$$

стало-быть, $AF : AB = FB : AE$, или (аксіома 5): $AF : AB = FB : AF$; переставивъ въ этой пропорціи послѣдующіе члены на мѣсто предыдущихъ, а предыдущіе — на мѣсто послѣдующихъ, получимъ:

$$AB : AF = AF : FB,$$

или, что прямая AB раздѣлена въ точкѣ F на такія двѣ части, что бо́льшая изъ нихъ есть средняя пропорціональная между всею прямою и ея меньшею частью, т. е. раздѣлена въ среднемъ и крайнемъ отношеніи. Въ чемъ и надлежало убѣдиться.

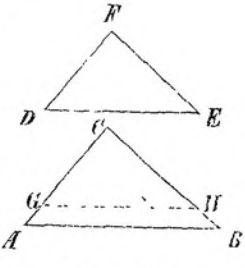
Замѣчаніе. Найти внѣ отрѣзка данной прямой AB на ея продолженіи, лежащей влѣво отъ точки A, такую точку G, которая обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что разстояніе ея до точки A есть средняя пропорціональная между прямою AB и разстояніемъ той же точки G отъ точки B, тоже значитъ *раздѣлить прямую AB въ среднемъ и крайнемъ отношеніи*. Выше дано рѣшеніе задачи 33 въ предположеніи, что точка F, дѣлящая прямую AB въ среднемъ и крайнемъ отношеніи лежитъ между точками A и B. Это раздѣленіе прямой въ среднемъ и крайнемъ отношеніи можно называть *внутреннимъ*, въ отличіе отъ охарактеризованнаго выше раздѣленія прямой BA въ точкѣ G, которое можно называть *внѣшнимъ*. Точка G въ этомъ случаѣ лежитъ влѣво отъ A на продолженіи прямой AB и на разстояніи равномъ прямой AD (черт. 165), въ чемъ предоставляется убѣдиться учащемуся. Это подтверждается вторымъ вещественнымъ корнемъ квадратнаго уравненія, къ которому, съ алгебраической точки зрѣнія, сводится рѣшеніе задачи. Чаще, впрочемъ, приходится встрѣчаться съ внутреннимъ раздѣленіемъ прямой въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

Теорема 139 (обратная теоремѣ 138). Если стороны одного треугольника пропорціональны сторонамъ другого, то углы одного треугольника попарно равны угламъ другого, т. е. треугольники подобны.

Доказательство. Пусть (черт. 166) въ треугольникахъ ABC и DEF

$$AC : DF = BC : EF = AB : DE;$$

требуется доказать, что $\angle D = \angle A$ и $\angle E = \angle B$.—Для доказательства этого отъ точки C на сторонѣ CA отложимъ прямую CG равную DF и проведемъ изъ точки G прямую GH, параллельную сторонѣ AB. Получимъ



Черт. 166.

$AC : GC = BC : HC = AB : GH$ (теоремы 131 — 135)

намъ же дана пропорція

$$AC : DF = BC : EF = AB : DE;$$

сравнивъ ее почленно съ полученною нами пропорціею, увидимъ, что первыя отношенія равны между собою; стало-быть, и остальныя отношенія тоже равны, т. е. получимъ двѣ новыя пропорціи:

$$BC : EF = BC : HC \text{ и } AB : DE = AB : GH.$$

Такъ какъ въ каждой изъ этихъ пропорцій предыдущіе члены равны, то и послѣдующіе члены въ каждой изъ нихъ тоже равны между собою, т. е.

$$EF = HC \text{ и } DE = GH;$$

но $DF = GC$ по отложенію, слѣдовательно (теорема 52):

$$\triangle DEF = \triangle GHC.$$

и въ нихъ

$$\angle D = \angle G, \text{ а } \angle E = \angle H.$$

Но $\angle G = \angle A$, а $\angle H = \angle B$ (теорема 30); стало-быть (аксіома 5).

$$\angle D = \angle A \text{ и } \angle E = \angle B,$$

т. е. треугольники ABC и DEF подобны. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе 1-ое. Для подобія прямолинейныхъ фигуръ вообще необходимо, какъ о томъ свидѣтельствуетъ опредѣленіе, не только равенство угловъ, взятыхъ въ одномъ и томъ же порядкѣ въ обѣихъ фигурахъ, но также и соотвѣтственная пропорціональность сторонъ, образующихъ равные между собою углы. Ибо, какъ въ томъ легко убѣдиться на частномъ примѣрѣ, углы двухъ многоугольниковъ могутъ быть порознь равны между собою (напр., въ косоугольномъ параллелограммѣ и ромбѣ съ тѣми же углами), а стороны фигуръ не пропорціональны, поэтому и самыя фигуры не подобны; и обратно: стороны могутъ быть пропорціональны (напр., въ косоугольномъ параллелограммѣ и прямоугольникѣ, стороны котораго по порядку вдвое меньше соотвѣтственныхъ сторонъ параллелограмма), но углы не равны, а потому самыя фигуры тоже не подобны. Для подобія же треугольниковъ, какъ это видно изъ теоремъ 138 и 139, вполнѣ достаточно либо соотвѣтственнаго равенства угловъ одного угламъ другого, либо же пропорціональности всѣхъ трехъ сторонъ одного треугольника сторонамъ другого: существованіе одного изъ этихъ условій влечетъ за собою существованіе также и другого. Поэтому подобіе треугольниковъ нѣкоторые авторы, независимо отъ подобія вообще прямолинейныхъ плоскихъ фигуръ, опредѣляютъ такъ: подобными называются треугольники, въ которыхъ углы одного порознь равны угламъ другого.

Замѣчаніе 2-ое. Если двѣ прямолинейныя фигуры равны между собою, то онѣ подобны, потому что углы одной изъ нихъ въ этомъ слу-

чаѣ порознь равны угламъ другой и при этомъ соотвѣтственныя стороны равныхъ фигуръ пропорціональны, причемъ знаменатель характеризующей ихъ пропорціи въ этомъ случаѣ, очевидно, равенъ единицѣ. Поэтому совмѣстимость или равенство фигуръ можно разсматривать, какъ частный случай ихъ подобія.

Теорема 140. Если двѣ стороны одного треугольника пропорціональны двумъ сторонамъ другого и углы, заключенные между этими сторонами, равны между собою, то треугольники подобны.

Доказательство. Пусть (черт. 167)

$$AB : DE = BC : EF \text{ и пусть } \angle B = \angle E;$$

требуется либо доказать, что $\angle A = \angle D$, либо же, что

$$AC : DF = BC : EF = AB : DE.$$

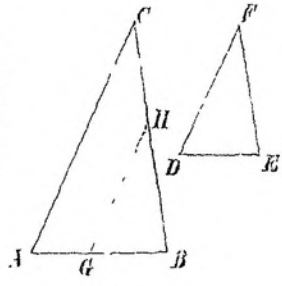
Предоставляя первое, въ качествѣ упражненія, учащемуся, докажемъ справедливость пропорціи

$$AC : DF = BC : EF = AB : DE.$$

Для доказательства отложимъ отъ точки B на сторону BA прямую BG, равную сторонѣ ED, и изъ точки G проведемъ прямую GH параллельно сторонѣ AC. Получимъ пропорцію

$$AB : GB = BC : HB = AC : GH.$$

Принявъ во вниманіе данную намъ пропорцію



Черт. 167.

$$AB : DE = BC : EF$$

и сравнивъ ея члены съ членами первыхъ двухъ отношеній полученной нами пропорціи, найдемъ, что такъ какъ

$$AB = AB.\ GB = DE \text{ и } BC = BC,$$

то и

$$HB = EF.$$

А въ такомъ случаѣ

$$\triangle GBH = \triangle DFE \text{ (теорема 51) и } GH = DF.$$

Стало-быть (аксіома 5), вставивъ въ данную пропорцію вмѣсто прямыхъ GB, HB и GH равныя имъ стороны треугольника DEF, получимъ что

$AB : DE = BC : EF = AC : DF$, т. е. что $\triangle ABC \infty \triangle DEF$.

Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Если катеты одного прямоугольнаго треугольника пропорціональны катетамъ другого, то треугольники подобны. — Дѣйствительно: углы, заключенные между катетами этихъ треугольниковъ, равны, какъ прямые.

Теорема 141. Если стороны одного треугольника порознь параллельны сторонамъ другого, то треугольники подобны.

Доказательство. Пусть (чертежа въ этомъ случаѣ не требуется) стороны одного треугольника параллельны сторонамъ другого; требуется доказать, что треугольники подобны. — Для доказательства этого прежде всего обозначимъ буквою A одинъ изъ угловъ одного треугольника и буквою a—уголъ второго треугольника, образованный прямыми, параллельными сторонамъ угла A, далѣе—буквою B нѣкоторый другой уголъ перваго треугольника, буквою же b—уголъ второго треугольника, образованный прямыми, параллельными сторонамъ угла B, наконецъ, буквою C—третій уголъ перваго треугольника, буквою c—третій уголъ второго треугольника, образованный прямыми, параллельными сторонамъ угла C. Далѣе примемъ во вниманіе, что

$$\angle A + \angle B + \angle C = 2d \text{ (теорема 45)},$$
$$\angle a + \angle b + \angle c = 2d \text{ (теорема 45)}$$

и что поэтому (аксіома 8)

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle a + \angle b + \angle c = 4d.$$

Напишемъ это послѣднее равенство въ такомъ видѣ (аксіома 2):

$$(\angle A + \angle a) + (\angle B + \angle b) + (\angle C + \angle c) = 4d$$

и, на основаніи этого равенства, докажемъ теперь, что $\angle A = \angle a$, а $\angle B = \angle b$. Для доказательства этого предположимъ, что

$$\angle A \gtrless \angle a;$$

тогда

$$\angle A + \angle a = 2d \text{ (теорема 39)}.$$

Въ такомъ случаѣ

$$\angle B + \angle b < 2d \text{ и } \angle C + \angle c < 2d,$$

потому что въ противномъ случаѣ получилось бы, что сумма, бо́льшая чѣмъ $4d$, равна $4d$, чего быть не можетъ (аксіома 1). Но въ такомъ случаѣ

$$\angle B = \angle b \text{ и } \angle C = \angle c \text{ (теорема 39)}.$$

Слѣдовательно (слѣдствіе 5-ое теоремы 45) получимъ, что также

$$\angle A = \angle a,$$

что̀ противорѣчитъ сдѣланному нами предположенію, по которому

$$\angle A \gtrless \angle a.$$

Стало-быть, предположеніе, будто $\angle A$ не равенъ углу a, невѣрно, а потому

$$\angle A = \angle a.$$

Точно такимъ же образомъ убѣдимся, что $\angle B = \angle b$. Стало-быть,

$$\triangle ABC \sim \triangle abc \text{ (слѣдствіе 1-е теоремы 138)}.$$

Требовалось доказать

Теорема 142. Если стороны одного треугольника порознь перпендикулярны къ сторонамъ другого, то треугольники подобны.

Доказательство этой теоремы ведется совершенно такъ же, какъ доказательство предыдущей. Во вниманіе принимаются теоремы 45 и 42.

Замѣчаніе. Въ треугольникахъ, которыхъ стороны порознь параллельны или перпендикулярны другъ другу, параллельныя или перпендикулярныя другъ другу стороны суть сходственныя стороны этихъ подобныхъ треугольниковъ, ибо онѣ противолежатъ равнымъ между собою угламъ ихъ.

Теорема 143. Если гипотенуза и катетъ одного прямоугольнаго треугольника пропорціональны гипотенузѣ и катету другого, то эти прямоугольные треугольники подобны.

Доказательство. Пусть (черт. 168) треугольники ABC и DEF треугольники прямоугольные, у которыхъ углы A и D прямые, и пусть BC : EF = AB : DE; требуется доказать, что эти треугольники подобны. — Для доказательства этого на сторонѣ BA отъ точки B отложимъ прямую BG, равную сторонѣ ED, и изъ точки G проведемъ прямую GH параллельно къ AC. Тогда

BC : HB = AB : GB (слѣдствіе теоремы 131).

Сравнивъ эту пропорцію почленно съ данною намъ пропорціею

BC : EF = AB : DE,

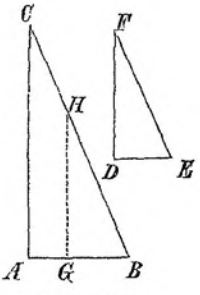
найдемъ, что HB = EF; слѣдовательно (теорема 66)

△ GBH = △ DEF,

а потому

∠ B = ∠ E. Но такъ какъ ∠ A = ∠ D (теорема 30), то

△ ABC ∞ ∠ DEF (теорема 138).



Черт. 168.

Что и требовалось доказать.

Теорема 144. Если изъ вершины прямого угла прямоугольнаго треугольника провести къ гипотенузѣ перпендикуляръ, то этотъ перпендикуляръ раздѣляетъ данный треугольникъ на два треугольника, которые порознь подобны другъ другу и изъ которыхъ каждый подобенъ данному.

Доказательство. Пусть (черт. 169) △ ABC есть треугольникъ прямоугольный, пусть ∠ B есть уголъ прямой, а прямая BD перпендикулярна къ гипотенузѣ AC; требуется доказать, что

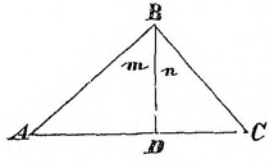
△ ABD ∞ △ DBC,
△ ABD ∞ △ ABC,
△ CBD ∞ △ EBC.

Для доказательства этого разсмотримъ сначала △ ABD и △ DBC.

Въ этихъ прямоугольныхъ треугольникахъ $\angle m = \angle C$ (теорема 42); а потому

$$\triangle ABD \sim \triangle DBC$$ (слѣдствіе 2 теоремы 138).

Что и требовалось доказать. — Разсмотрѣвъ прямоугольные треугольники ABD и ABC, найдемъ, что у нихъ острый $\angle A$ общій, стало-быть,



Черт. 169.

$\triangle ABD \sim \triangle ABC$ (слѣдствіе 2 теоремы 138).

Что и требовалось доказать.—Наконецъ, разсмотрѣвъ прямоугольные треугольники CBD и ABC, найдемъ, что у нихъ острый $\angle C$ общій. Стало-быть,

$$\triangle CBD \sim \triangle ABC$$ (слѣдствіе 2 теоремы 138).

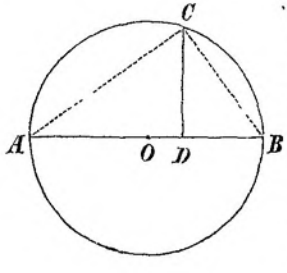
Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1-ое. Перпендикуляръ, проведенный изъ вершины прямого угла къ гипотенузѣ, есть средняя пропорціональная между проэкціями катетовъ на гипотенузу.—Дѣйствительно (черт. 169):

$$\triangle ABD \sim \triangle CBD,$$

а въ подобныхъ треугольникахъ противъ равныхъ между собою угловъ лежатъ пропорціональныя стороны; стало-быть:

$$AD : BD = BD : DC.$$

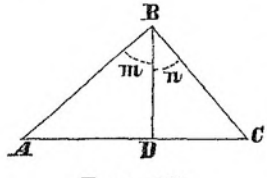


Черт. 170.

Слѣдствіе 2-ое. Перпендикуляръ, проведенный изъ какой-либо точки окружности къ діаметру есть средняя пропорціональная между образованными имъ отрѣзками діаметра.—Дѣйствительно (черт. 170): точка C есть вершина прямоугольнаго треугольника ABC (слѣдствіе 2 теоремы 122), а отрѣзки діаметра AD и DB суть проэкціи катетовъ AC и CB. А въ такомъ случаѣ (слѣдствіе 1-ое)

$$AD : CD = CD : DB.$$

Слѣдствіе 3-е. Если изъ вершины прямого угла прямоугольнаго треугольника провести къ гипотенузѣ перпендикуляръ, то каждый изъ катетовъ есть средняя пропорціональная между гипотенузою и проэкціею этого катета на гипотенузу.—Дѣйствительно, (черт. 171) $\triangle ABD \sim \triangle ABC$, а въ подобныхъ треугольникахъ противъ порознь равныхъ между собою угловъ лежатъ пропорціональныя стороны; стало-быть:



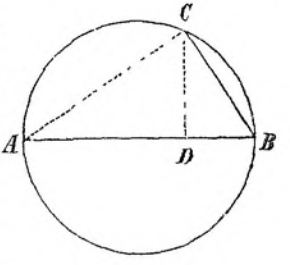
Черт. 171.

$$AC : AB = AB : AD.$$

Точно такъ же найдемъ, что

$$AC : BC = BC : CD.$$

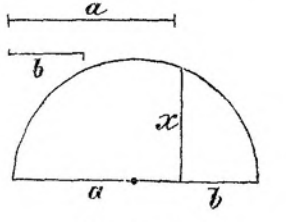
Слѣдствіе 4-ое. Хорда есть средняя пропорціональная между всѣмъ діаметромъ, проведеннымъ чрезъ конецъ хорды, и проэкціею этой хорды на этотъ діаметръ.—Дѣйствительно (черт. 172), другой конецъ C хорды CB есть вершина прямого угла прямоугольнаго треугольника ACB, а хорда CB есть катетъ его. Стало-быть (слѣдствіе 2-ое), AB : CB = CB : DB.



Черт. 172.

Задача 34. Даны двѣ конечныя прямыя a и b; требуется найти прямую, которая была бы среднею пропорціональною между ними.

Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи сложимъ прямыя a и b (черт. 173), половину этой суммы примемъ за радіусъ окружности, а изъ общей точки отрѣзковъ a и b возставимъ перпендикуляръ x до пересѣченія съ окружностью.



Черт. 173.

Полученная такимъ образомъ прямая x есть искомая прямая (почему?).

Замѣчаніе. Учащемуся предлагается рѣшить ту же задачу на основаніи слѣдствія 4-го теоремы 144.

Теорема 145. Во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ его катетовъ.

Доказательство. Пусть (выполненіе чертежа предоставляется учащемуся) $\triangle$ ABC прямоугольный треугольникъ, въ которомъ $\angle C = d$; требуется доказать, что

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Для доказательства этого опустимъ изъ вершины прямого угла C на гипотенузу перпендикуляръ CD и обозначимъ проэкцію катета AC на гипотенузу буквою x, а проэкцію катета BC буквою y; тогда

$$x + y = AB.$$

Кромѣ того,

$$AB : AC = AC : x \text{ (слѣдствіе 3 теоремы 144),}$$

и

$$AB : BC = BC : y \text{ (слѣдствіе 3 теоремы 144);}$$

найдя произведеніе крайнихъ членовъ въ обѣихъ этихъ пропорціяхъ, получимъ:

$$AB \cdot x = AC^2$$

и

$$AB \cdot y = BC^2;$$

откуда (аксіома 8)

$$AB \cdot x + AB \cdot y = AC^2 + BC^2;$$

взявъ AB въ лѣвой части равенства общимъ множителемъ, получимъ:

$$AB \cdot (x + y) = AC^2 + BC^2,$$

т. е.

$$AB \cdot AB = AC^2 + BC^2, \text{ или } AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

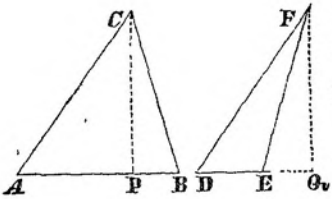
Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1-ое. Квадратъ катета прямоугольнаго треугольника равенъ разности между квадратомъ гипотенузы его и квадратомъ другого катета. — Дѣйствительно: если буквою a обозначить гипотенузу, а буквами b и c катеты, то (теорема 145)

$$a^2 = b^2 + c^2, \text{ откуда } b^2 = a^2 - c^2, \text{ а } c^2 = a^2 - b^2.$$

Слѣдствіе 2-ое. Квадратъ стороны, противолежащей въ какомъ угодно треугольникѣ острому углу его, равенъ суммѣ квадратовъ остальныхъ двухъ сторонъ, уменьшенной на удвоенное произведеніе, составленное изъ второй стороны его и проэкціи третьей стороны на вторую. — Дѣйствительно: если (черт. 174) $\angle A$ есть уголъ острый, BC — противолежащая ему сторона, CD перпендикуляръ ко второй сторонѣ AB, а AP — проэкція третьей стороны AC на вторую сторону AB, то

$$BC^2 = PB^2 + CP^2 \text{ (теорема 145)}$$



Черт. 174. Черт. 175.

и въ свою очередь

$CP^2 = AC^2 - AP^2$ (слѣдствіе 1-ое теоремы 145) откуда (аксіома 5)

$$BC^2 = PB^2 + AC^2 - AP^2.$$

Но

$$PB = AB - AP;$$

значитъ,

$$PB^2 = (AB - AP)^2 = AB^2 + AP^2 - 2AB \cdot AP.$$

Тогда (аксіома 5)

$$BC^2 = AB^2 + AP^2 + AC^2 - 2AB \cdot AP - AP^2,$$

откуда

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AP.$$

Замѣчаніе. Доказательство остается то же, если одинъ изъ угловъ, напр., $\angle B$ тупой или прямой. Убѣдиться въ этомъ предоставляется учащемуся.

Слѣдствіе 3-ое. Квадратъ стороны, противолежащей тупому углу въ треугольникѣ, равенъ суммѣ квадратовъ прочихъ двухъ сторонъ, увеличенной на удвоенное произведеніе, составленное изъ второй стороны его и проэкціи третьей на вторую. — Дѣйствительно (черт. 175): если $\angle E$ есть уголъ тупой, сторона DF про-

тиволежитъ ему, а $FQ \perp DE$, прямая EQ есть проэкція третьей стороны EF на вторую сторону DE, то

$$DF^2 = DQ^2 + FQ^2 \text{ (теорема 145)}$$

и въ свою очередь

$$FQ^2 = EF^2 - EQ^2 \text{ (слѣдствіе 1-ое теоремы 145),}$$

откуда (аксіома 5)

$$DF^2 = DQ^2 + EF^2 - EQ^2.$$

Но

$$DQ = DE + EQ;$$

значитъ,

$$DQ^2 = DE^2 + 2DE \cdot EQ + EQ^2.$$

Тогда (аксіома 5)

$$DF^2 = DE^2 + 2DE \cdot EQ + EQ^2 + EF^2 - EQ^2,$$

откуда

$$DF^2 = DE^2 + EF^2 + 2DE \cdot EQ.$$

Теорема 146 (обратная теоремѣ 145). Если квадратъ какой-либо одной изъ сторонъ треугольника равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ, то это—треугольникъ прямоугольный.

Теорема 147 (обратная слѣдствію 2-му теоремы 145). Если квадратъ любой изъ сторонъ треугольника менѣе суммы квадратовъ остальныхъ двухъ, то это—треугольникъ остроугольный.

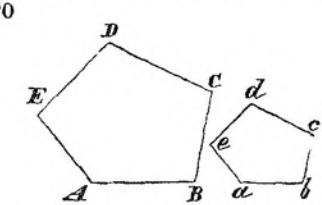
Теорема 148 (обратная слѣдствію 3-му теоремы 145). Если квадратъ какой-либо одной изъ сторонъ треугольника болѣе суммы квадратовъ остальныхъ двухъ сторонъ, то это—треугольникъ тупоугольный.

Доказательство этихъ теоремъ ведется отъ противоположнаго и предоставляется учащемуся.

Теорема 149. Если два многоугольника подобны, то периметры ихъ относятся между собою какъ сходственныя стороны этихъ многоугольниковъ.

Доказательство. Пусть (черт. 176) многоугольникъ ABCDE подобенъ многоугольнику *abcde*; пусть при этомъ $\angle A = \angle a$, $\angle B = \angle b$ и т. д., и пусть AB и *ab*, BC и *bc*, CD и *cd* и т. д. суть сходственныя стороны; требуется доказать, что периметръ перваго многоугольника относится къ периметру второго, какъ AB относится къ *ab*.—Для доказательства этого составимъ слѣдующія пропорціи:

$$AB : ab = AB : ab \text{ (аксіома 1)}$$
$$\left.\begin{aligned} BC : bc &= AB : ab \\ CD : cd &= AB : ab \\ DE : de &= AB : ab \\ AE : ae &= AB : ab. \end{aligned}\right\} \text{ по условію}$$



Черт. 176.

Такъ какъ знаменатель отношеній всѣхъ этихъ пропорцій одинъ и тотъ же, то ихъ можно почленно сложить, и тогда, обозначивъ периметръ, т. е. сумму всѣхъ сторонъ перваго многоугольника—буквою P, а периметръ второго—буквою p, получимъ:

$$P : p = 5AB : 5ab, \text{ или } P : p = AB : ab.$$

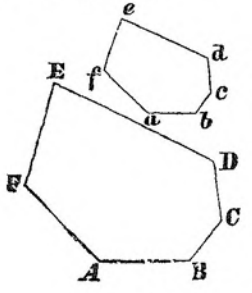
Стало-быть, периметры двухъ подобныхъ многоугольниковъ относятся между собою, какъ сходственныя ихъ стороны. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Периметры двухъ подобныхъ треугольниковъ относятся между собою какъ сходственныя ихъ стороны. — Дѣйствительно: въ подобныхъ треугольникахъ

$$P : p = 3AB : 3ab = AB : ab.$$

Теорема 150. Если два многоугольника подобны, если изъ вершинъ сходственно равныхъ между собою угловъ этихъ многоугольниковъ провести ихъ діагонали, то діагонали каждаго многоугольника раздѣляютъ его на треугольники, порознь подобные треугольникамъ другого многоугольника.

Доказательство. Пусть (черт. 177) многоугольники ABCDE и $abcde$ подобны, пусть $\angle A = \angle a$, $\angle B = \angle b$ и т. д. и пусть $AB : ab = BC : bc = CD : cd =$ и т. д.; пусть, наконецъ, изъ вершины A проведены всѣ діагонали перваго многоугольника, а изъ вершины a — всѣ діагонали второго; требуется доказать, что составленные такимъ образомъ треугольники одного многоугольника порознь подобны треугольникамъ другого. — Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что число діагоналей обоихъ многоугольниковъ одно и то же (почему?); стало-быть, число образованныхъ ими треугольниковъ будетъ въ обоихъ фигурахъ одинаково; но по условію



Черт. 177.

$$\angle B = \angle b,$$

а стороны AB и BC треугольника ABC, образующія $\angle B$, пропорціональны сторонамъ ab и bc треугольника bac, образующимъ равный ему $\angle b$; стало-быть (теорема 140)

$$\triangle ABC \infty \triangle abc.$$

Обратимся теперь къ треугольникамъ ACD и acd. Изъ подобія треугольниковъ ABC и abc слѣдуетъ, что

$$AC : ac = CB : cb; \text{ но по условію}$$
$$CB : cb = CD : cd;$$

слѣдовательно (аксіома 6)

$$AC : ac = CD : cd;$$

но $\angle C$ треугольника ABC равенъ углу c треугольника abc, стало-

быть, и $\angle$ C треугольника ACD равенъ углу c треугольника acd, такъ какъ эти послѣдніе углы представляютъ собою разность равныхъ между собою величинъ. Слѣдовательно (теорема 140)

$$\triangle \text{ ACD} \infty \triangle \textit{acd}.$$

Такимъ же точно образомъ доказывается подобіе остальныхъ треугольниковъ. Стало-быть: если два многоугольника подобны и если изъ вершинъ сходственно-равныхъ между собою угловъ этихъ многоугольниковъ проведемъ діагонали, то діагонали одного многоугольника раздѣляютъ его на треугольники, порознь подобные треугольникамъ второго многоугольника. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Треугольники, разсмотрѣнные выше, не только порознь подобны, но и *подобнымъ образомъ расположены*, т. е., считая въ одномъ и томъ же направленіи, первый треугольникъ перваго многоугольника подобенъ первому же треугольнику второго многоугольника, второй треугольникъ перваго подобенъ второму же второго, третій перваго—третьему второго и т. д. и, кромѣ того, въ соотвѣтственно подобныхъ другъ другу треугольникахъ соотвѣтственные элементы одинаковымъ образомъ расположены.

Теорема 151 (обратная теоремѣ 150). Если діагонали одного многоугольника, проведенныя изъ какой-либо вершины его, раздѣляютъ его на треугольники, которые порознь подобны треугольникамъ, образованнымъ такимъ же образомъ въ другомъ многоугольникѣ, и если при этомъ соотвѣтственные треугольники обоихъ многоугольниковъ подобнымъ образомъ расположены, то данные многоугольники подобны.

Доказательство. Пусть (учащемуся предлагается самому выполнить чертежъ, притомъ слѣдующимъ образомъ: сначала начертить $\triangle$ ABC, а потомъ—ему подобный $\triangle$ abc, затѣмъ къ сторонѣ AC пристроить $\triangle$ ACD, а къ ac — $\triangle$ acd, и т. д.) $\triangle$ ABC ∞ abc, $\triangle$ ACD ∞ $\triangle$ acd, $\triangle$ ADE ∞ $\triangle$ ade и т. д. и пусть они подобнымъ образомъ расположены; требуется доказать, что

$$\text{мн. ABCDE} \infty \text{ мн. } \textit{abcde}.$$

Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что всѣ углы, сумма которыхъ равна углу A, порознь равны частямъ угла a; стало-быть, въ этихъ многоугольникахъ $\angle \text{A} = \angle a$; точно также $\angle \text{B} = \angle b$, $\angle \text{C} = \angle c$ и т. д. Кромѣ того,

$$\text{AB} : ab = \text{BC} : bc = \text{AC} : ac;$$

но

$$\text{AC} : ac = \text{CD} : cd = \text{AD} : ad;$$

въ свою очередь

$$\text{AD} : ad = \text{DE} : de = \text{AE} : ae;$$

наконецъ,

$$AE : ae = EF : ef = AF : af.$$

Слѣдовательно (аксіома 6) всѣ эти отношенія равны между собою, а отобравъ нужныя намъ отношенія, получимъ:

$$AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EF : ef = AF : af.$$

Стало-быть, углы одного многоугольника порознь равны угламъ другого и сходственныя ихъ стороны пропорціональны, т. е. многоугольники подобны. Что и требовалось доказать.

§ 11. О вписанныхъ и описанныхъ фигурахъ и правильныхъ многоугольникахъ.

Опредѣленія. Многоугольникъ называется относительно даннаго круга *вписаннымъ*, если всѣ стороны его представляютъ собою хорды этого круга; многоугольникъ называется относительно даннаго круга *описаннымъ*, если всѣ стороны его суть касательныя къ окружности этого круга. Кругъ и окружность называется относительно многоугольника *вписанными*, если многоугольникъ по отношенію къ кругу есть многоугольникъ описанный; кругъ и окружность называются по отношенію къ данному многоугольнику *описанными*, если многоугольникъ вписанъ въ данный кругъ Когда требуется данную фигуру (многоугольникъ или окружность) сдѣлать вписанною, то говорятъ, что *вокругъ* или *около* этой фигуры—требуется описать такую-то фигуру; когда требуется данную фигуру (многоугольникъ или окружность) сдѣлать описанною, то говорятъ, что въ нее требуется вписать такую-то фигуру.

Теорема 152. Около всякаго треугольника можно описать окружность.

Доказательство. Пусть (чертежа въ этомъ случаѣ не требуется) данъ $\triangle ABC$; требуется доказать, что черезъ вершины его можно провести окружность.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что вершины всякаго треугольника не лежатъ на одной прямой. А чрезъ три точки, не лежащія на одной прямой можно провести окружность, и притомъ только одну окружность (лемма 5-ая, стр. 68). Стало-быть, чрезъ вершины треугольника ABC можно провести окружность, т. е. около него можно вписать окружность. Что и требовалось доказать

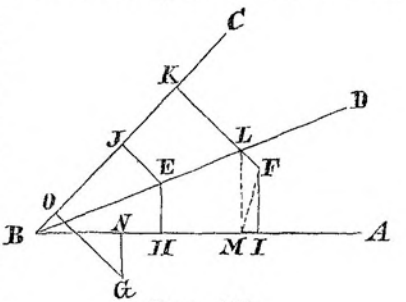
Слѣдствіе. Перпендикуляры, возставленные изъ срединъ сторонъ треугольника къ этимъ сторонамъ, пересѣкаются въ одной

точкѣ, а именно въ центрѣ описанной около даннаго треугольника окружности.—Дѣйствительно: если-бы перпендикуляръ, проведенный изъ средины третьей стороны не прошелъ черезъ точку O пересѣченія перпендикуляровъ, проведенныхъ изъ срединъ остальныхъ двухъ сторонъ, то онъ ихъ пересѣкъ-бы еще въ двухъ точкахъ (слѣдствіе 2-ое теоремы 1) и такимъ образомъ у окружности должно было бы три не совпадающихъ одинъ съ другимъ центра, чего быть не можетъ.

Замѣчаніе. Для того чтобы сдѣлать данный треугольникъ фигурою вписанною или, говоря иначе, для того чтобы около треугольника описать окружность, достаточно (лемма 5) изъ средины какой-либо стороны провести перпендикуляръ къ этой сторонѣ, изъ средины другой стороны провести перпендикуляръ къ этой послѣдней, точку пересѣченія перпендикуляровъ принять за центръ, а прямую, соединяющую эту точку съ одною изъ вершинъ —за радіусъ окружности, которая и будетъ описанною относительно даннаго треугольника.

Лемма 13. Биссектриса угла, лежащаго въ данной плоскости, есть геометрическое мѣсто всѣхъ тѣхъ точекъ этой плоскости, изъ которыхъ каждая равно удалена отъ обѣихъ сторонъ угла.

Доказательство. Пусть въ плоскости чертежа 178 данъ уголъ ABC и пусть прямая BD — биссектриса его; требуется доказать: 1) что всякая точка биссектрисы BD этого угла находится на одинаковомъ разстояніи отъ сторонъ BA и BC угла ABC, и 2) что всякая точка той же плоскости, не лежащая на этой биссектрисѣ, не равно-отдалена отъ сторонъ BA и BC угла ABC. — Для доказательства этого возьмемъ произвольную точку E на прямой BD, и двѣ точки F и G внѣ ея и ея продолженій. Опустимъ изъ точки E перпендикуляры EH и EJ на стороны BA и BC; получимъ прямоугольные треугольники BHE и BJE, которые равны между собою (слѣдствіе 3 теоремы 52), и въ нихъ EH = EI. Такимъ образомъ первая половина теоремы доказала.—Далѣе опустимъ изъ точекъ F перпендикуляры FI и FK на прямыя BA и BC; пусть точкою пересѣченія прямой FK и BD будетъ точка L; требуется доказать, что



Черт. 178.

$$FK > FI.$$

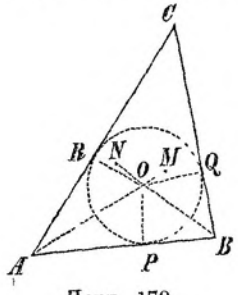
Для доказательства этого изъ точки L опустимъ перпендикуляръ LM на BA и соединимъ точку F съ точкою M. Тогда

$$LM + LF > FM \text{ (теорема 44)};$$

но по доказанному LM=LK; стало быть (аксіома 5) LK + LF > FM, или (аксіома 5) FK > FM; но FM > FI, стало-быть, FK > FI. Остается еще доказать, что GO > GN. Для доказательства этого слѣдуетъ принять во вниманіе слѣдствіе 1-ое теоремы 60-ой. Это предоставляется учащемуся.—Такимъ образомъ можно доказать: 1) что всякая точка на биссектрисѣ и ея продолженіи находится на равномъ разстояніи отъ сторонъ угла, и 2) что всякая точка, не лежащая на биссектрисѣ и ея продолженіи не равно отдалена отъ сторонъ угла, гдѣ бы эта точка ни лежала—внутри или внѣ угла. Стало-быть, биссектриса угла вмѣстѣ со своимъ продолженіемъ въ противоположную сторону есть геометрическое мѣсто всѣхъ тѣхъ точекъ, изъ которыхъ каждая находится на одинаковомъ разстояніи отъ сторонъ угла. Что и требовалось доказать.

Теорема 153. Во всякій треугольникъ можно вписать окружность, и притомъ только одну.

Доказательство. Пусть (черт. 179) данъ △ ABC; требуется доказать, что въ него можно вписать окружность и притомъ только одну.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что если возможно въ данный треугольникъ вписать окружность, то центръ ея долженъ находиться отъ сторонъ треугольника на равномъ разстояніи. Но биссектриса угла A есть геометрическое мѣсто всѣхъ безъ исключенія точекъ, находящихся отъ сторонъ AB и AC на равномъ разстояніи; слѣдовательно, если въ треугольникъ ABC возможно вписать окружность, то центръ ея долженъ лежать на биссектрисѣ угла A. Тѣ же разсужденія можно повторить относительно биссектрисы любого изъ остальныхъ двухъ угловъ треугольника, напр., относительно биссектрисы угла B. Стало-быть, если окружность, вписанная въ данный треугольникъ, существуетъ, то центръ ея долженъ лежать въ точкѣ пересѣченія (постулать Евклида и слѣдствіе 3-е теоремы 1) биссектрисъ угловъ A и B. Опустимъ изъ точки пересѣченія O биссектрисъ двухъ угловъ A и B перпендикуляры OP, OQ и OR на стороны треугольника. Эти перпендикуляры равны между собою. Дѣйствительно: OP = OQ (лемма 13). Точно такъ же OP = OR (лемма 13). А потому OP = OQ = OR.



Черт. 179.

Принявъ точку O за центръ, а прямую OP за радіусъ, проведемъ окружность, которая пройдетъ чрезъ точки P, Q и R, причемъ прямыя AB, BC и AC будутъ касательными къ этой окружности (теорема 77). Но биссектрисы угловъ A и B могутъ пересѣчься только въ одной точкѣ (слѣдствіе 3-е теоремы 1). Стало-быть, во всякій треугольникъ можно вписать окружность, и притомъ только одну. Что и требовалось доказать.

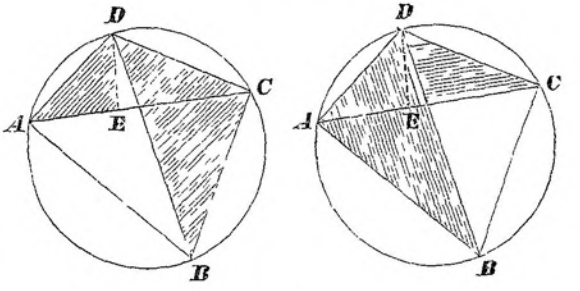
Слѣдствіе. Всѣ три биссектрисы угловъ треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ.—Дѣйствительно: если-бы биссектриса CL угла C даннаго треугольника ABC пересѣкла прочія двѣ биссектрисы не въ точкѣ O, то она пересѣкла-бы ихъ въ двухъ различныхъ точкахъ и такимъ образомъ у одной и той же окружности оказалось-бы три несовпадающихъ одинъ съ другимъ центра, чего быть не можетъ.

Замѣчаніе. При доказательствѣ теоремы 153 мы пользовались *методою геометрическихъ мѣстъ*, одною изъ могущественнѣйшихъ методъ Геометріи въ ея современномъ состояніи. Тою же методою мы пользовались при доказательствѣ теоремы 152. Она оказываетъ иногда величайшія услуги также при рѣшеніи задачъ.

Теорема 154. Если данный четыреугольникъ есть четыреугольникъ вписанный, то произведеніе его діагоналей равно суммѣ произведеній противолежащихъ его сторонъ.

Доказательство. Пусть (черт. 180) четыреугольникъ ABCD есть четыреугольникъ вписанный; требуется доказать, что

$$BD \cdot AC = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$



Черт. 180.

Для доказательства этого построимъ на AD уголъ ADE, равный углу BCD; тогда получимъ, что $\triangle ADE \sim \triangle BDC$ (теорема 138), и въ нихъ $BD : AD = BC : AE$, откуда получимъ равенство

(I) $$BD \cdot AE = AD \cdot BC.$$

Кромѣ того, мы разсмотримъ треугольники ADB и EDC. Уголъ B перваго изъ нихъ равенъ углу C второго, а уголъ D перваго

изъ нихъ равенъ углу D второго, потому что каждый изъ этихъ двухъ послѣднихъ угловъ составленъ изъ одинаковыхъ частей. Стало-быть $\triangle ADB \sim \triangle EDC$ (теорема 138), и въ нихъ

$$BD : DC = AB : EC,$$

откуда получимъ равенство:

(II) $$BD \cdot EC = DC \cdot AB.$$

Сложивъ почленно равенства (I) и (II), получимъ:

$$BD \cdot AE + BD \cdot EC = AD \cdot BC + DC \cdot AB$$

или

$$BD \cdot (AE + EC) = AD \cdot BC + DC \cdot AB,$$

т. е.

$$BD \cdot AC = DC \cdot AB + AD \cdot BC$$

Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Эта теорема извѣстна въ наукѣ подъ названіемъ *Птоломеевой теоремы*, по имени славнаго греческаго геомстра Птоломея, жившаго во II-мъ столѣтіи по Р. Хр.

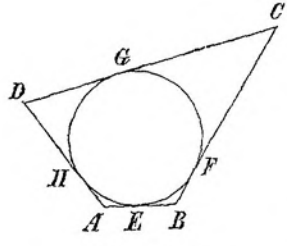
Лемма 14. Если изъ точки, взятой въ плоскости круга но внѣ его, провести обѣ касательныя къ его окружности, то отрѣзки ихъ, заключенные между этою точкою и точками касанія, равны между собою.

Доказательство предоставляется учащемуся.

Теорема 155. Если данный четыреугольникъ есть четыреугольникъ описанный, то сумма двухъ противолежащихъ его сторонъ равна суммѣ остальныхъ двухъ сторонъ.

Доказательство. Пусть (черт. 181) четыреугольникъ ABCD есть четыреугольникъ описанный, пусть точки E, F, G, H точки касанія; требуется доказать, что

$$BC + AD = DC + AB.$$



Черт. 181.

Для доказательства этого выпишемъ рядъ равенствъ (лемма 13):

$$FB = EB,$$
$$CF = GC,$$
$$DH = DG,$$

и $$HA = AE.$$

Сложивъ почленно эти равенства и соединивъ слагаемыя приличнымъ образомъ, получимъ:

$$(FB + CF) + (DH + HA) = (EB + AE) + (DG + GC)$$

или

$$BC + AD = CD + AB.$$

Что и требовалось доказать.

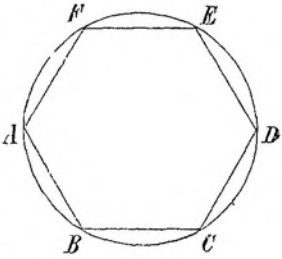
Замѣчаніе. Учащемуся предоставляется въ качествѣ весьма полезнаго упражненія, изслѣдовать—справедливо ли предложеніе, обратное теоремѣ 155.

Теорема 156. Если раздѣлить окружность на нѣсколько равныхъ между частей и соединить послѣдовательно точки дѣленія прямыми, то получится многоугольникъ, въ которомъ стороны равны между собою, а также и углы между собою равны.

Доказательство. Пусть (черт. 182)

$$\smile AB = \smile BC = \smile CD = \smile DE = \smile EF = \smile FA;$$

требуется доказать, что въ многоугольникѣ, полученномъ отъ послѣдовательнаго соединенія точекъ дѣленія A, B, C, D, E и F прямыми линіями, всѣ стороны равны между собою, а также и всѣ углы между собою равны.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что такъ какъ равнымъ дугамъ въ одной и той же окружности соотвѣтствуютъ равныя хорды (теорема 107), то всѣ хорды: AB, BC, CD, и т. д. равны между собою; слѣдовательно стороны полученнаго нами многоугольника равны между собою. Что касается угловъ, то каждый изъ нихъ измѣряется половиною дуги, на которую онъ опирается (теорема 122), а дуги, на которыя опирается каждый изъ этихъ угловъ, равны между собою (почему?). Стало-быть, не только стороны, но и углы полученнаго нами многоугольника равны между собою. Что и требовалось доказать.



Черт. 182.

Опредѣленія. Многоугольникъ, въ которомъ всѣ стороны равны между собою, а углы тоже между собою равны, называется *правильнымъ многоугольникомъ*. Къ числу правильныхъ многоугольниковъ принадлежатъ также: равносторонній треугольникъ и квадратъ; равносторонній треугольникъ—это правильный многоугольникъ о трехъ, а квадратъ — правильный многоугольникъ о четырехъ сторонахъ.

Замѣчаніе 1-ое. Теорема 156 доказываетъ существованіе правильныхъ многоугольниковъ.

Замѣчаніе 2-ое. Раздѣленіе всей окружности на произвольное число равныхъ между собою частей нами допускается какъ нѣчто вполнѣ возможное (ср. допущеніе относительно угловъ, стр. 17). Но выполненіе этого дѣленія на самомъ дѣлѣ принадлежитъ къ числу задачъ, рѣшеніе которыхъ требуетъ помощи Тригонометріи и Высшаго Анализа и не всегда возможно съ помощью прямой и окружности. Ниже мы ознакомимся съ

чисто геометрическими пріемами раздѣленія окружности на 3, 4, 5, 6 и 10 равныхъ между собою частей.

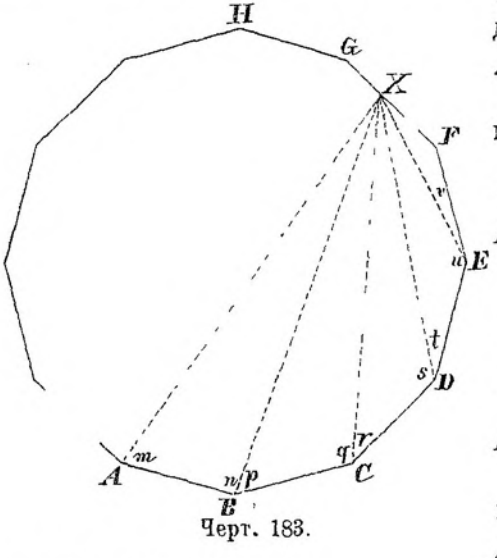
Замѣчаніе 3-е. Такъ какъ сумма угловъ многоугольника, число сторонъ котораго равно n, равняется $2d.(n-2)$, то каждый изъ угловъ правильнаго n-угольника равняется

$$\frac{2d.(n-2)}{n},$$

откуда вытекаетъ, что если $n>4$, то каждый изъ угловъ правильнаго многоугольника есть уголъ тупой.

Лемма 15. Если данный многоугольникъ есть многоугольникъ правильный, то биссектрисы угловъ, прилежащихъ къ одной и той же сторонѣ его, пересѣкаются, притомъ непремѣнно внутри многоугольника.

Доказательство. Пусть (черт. 183) многоугольникъ ABCDEFGH есть многоугольникъ правильный; пусть изъ вершинъ A и B проведены биссектрисы угловъ A и B; требуется доказать, что эти биссектрисы пересѣкутся внутри многоугольника.—*Для доказательства* этого примемъ во вниманіе, что онѣ пересѣкутся на основаніи постулата Евклида; далѣе предположимъ, что онѣ пересѣкутся въ точкѣ X на какой-либо сторонѣ, напр., на сторонѣ DE многоугольника ABCDEFGH... Соединимъ точку X съ точкою C.



Черт. 183.

Такъ какъ по условію BX дѣлитъ уголъ B пополамъ, то $\angle n = \angle p$; поэтому $\triangle ABX = \triangle CBX$ (теорема 51); слѣдовательно

$$\angle q = \angle m = \frac{\angle A}{2} = \frac{\angle C}{2}$$

А въ такомъ случаѣ

$$\angle q = \angle r,$$

и $\triangle BCX = \triangle DCX$ (теорема 51); слѣдовательно

$$\angle s = \angle p = \frac{\angle B}{2} = \frac{\angle D}{2}$$

А въ такомъ случаѣ

$$\angle s = \angle t,$$

и

$\triangle CDX = \triangle EDX$ (теорема 51); слѣдовательно

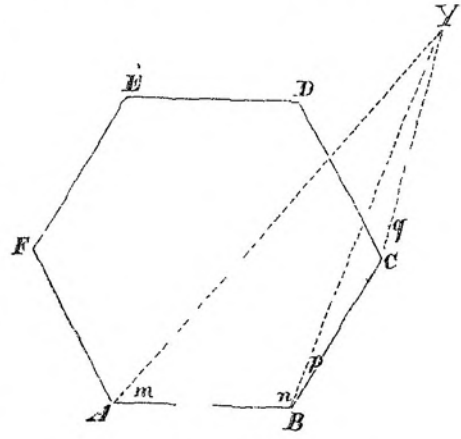
$$\angle u = \angle r = \frac{\angle C}{2} = \frac{\angle E}{2}$$ (аксіома 6).

A въ такомъ случаѣ $\angle u = \angle v$, и $\triangle DEX = \triangle FEX$ (теорема 51); слѣдовательно

$$\angle t = \angle F$$

или

$\frac{\angle D}{2} = \angle F$ (аксіома 5) или, наконецъ, $\frac{\angle D}{2} = \angle D$ (аксіома 5), чего быть не можетъ. Стало-быть, точка пересѣченія биссектрисъ угловъ A и B не можетъ лежать ни на одной изъ сторонъ правильнаго многоугольника. Точно такъ же можно доказать, что она не можетъ лежать ни въ одной изъ вершинъ многоугольника.—Для того же, чтобы доказать, что она не можетъ лежать внѣ многоугольника, предположимъ (черт. 184), что прямыя AY и BY суть равнодѣлящія угловъ A и B и что точка ихъ пересѣченія Y лежитъ внѣ многоугольника. Соединимъ точку Y съ вершиною C и разсужденіями, совершенно подобными прежнимъ, придемъ къ выводу, что въ этомъ (правда, простѣйшемъ) случаѣ $\frac{\angle C}{2} = \angle q$, который больше угла C, чего быть не можетъ. Такимъ же образомъ докажемъ, что во всякомъ случаѣ точка пересѣченія биссектрисъ угловъ, прилежащихъ къ сторонѣ правильнаго многоугольника, не можетъ находиться ни на обводѣ многоугольника, ни внѣ его. Стало-быть, биссектрисы двухъ прилежащихъ къ одной сторонѣ угловъ правильнаго многоугольника пересѣкаются внутри его. Что и требовалось доказать.

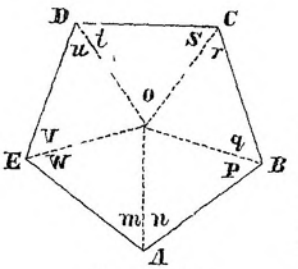


Черт. 184.

Теорема 157. Если данный многоугольникъ есть многоугольникъ правильный, то около него можно описать окружность.

Доказательство. Пусть (черт. 185) данный многоугольникъ ABCDE есть многоугольникъ правильный, т. е. пусть въ немъ всѣ стороны равны между собою, а также и углы между собою равны; требуется доказать, что можно провести такую окружность, которая пройдетъ чрезъ всѣ вершины этого многоугольника.—Для доказательства этого раздѣлимъ два, прилежащихъ къ одной и той-же сторонѣ, угла A и B даннаго многоугольника пополамъ. Эти биссектрисы пересѣкутся внутри многоугольника

(лемма 15). Пусть точка ихъ пересѣченія будетъ точка O. Соединивъ точку O съ точками C, D и E, получимъ треугольники BOC, COD, DOE, EOA. Разсмотримъ прежде всего $\triangle$ AOB. Въ этомъ треугольникѣ



Черт. 185.

$$\angle n = \frac{\angle A}{2}$$

$$\angle p = \frac{\angle B}{2}$$

откуда (аксіома 11)

$$\angle n = \angle p,$$

а потому (теорема 59) OA = OB. Теперь разсмотримъ треугольники AOB и COB. Убѣдимся, что

$\triangle$ AOB = $\triangle$ BOC (теорема 51), и въ нихъ AO = OC; стало-быть, имѣемъ

$$OA = OB = OC,$$

т. е. если принять точку O за центръ, а прямую OA за радіусъ нѣкоторой окружности, то эта послѣдняя пройдетъ чрезъ точки A, B и C. Далѣе разсмотримъ треугольники BOC и COD. Изъ равенства треугольниковъ AOB и BOC мы имѣемъ, что

$$\angle r = \angle n;$$

но

$$\angle n = \frac{\angle A}{2} = \frac{\angle C}{2} \text{ (аксіома 5).}$$

слѣдовательно (аксіома 5)

$$\angle r = \frac{\angle C}{2}; \text{ но } \angle r + \angle s = \angle C, \text{ (аксіома 2)}$$

слѣдовательно (аксіома 5)

$\angle s = \frac{\angle C}{2}$ и $\angle r = \angle s$ (аксіома 5). А въ такомъ случаѣ $\triangle$ BOC = $\triangle$ COD (теорема 51), и въ нихъ OB = OD. Стало-быть имѣемъ, что AO = OB = OC = OD, т. е. что окружность, проходящая чрезъ точки A, B и C, проходитъ также чрезъ точку D. Тѣмъ же пріемомъ докажемъ, что

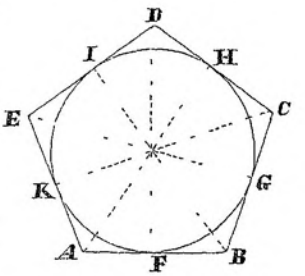
$$OE = OC \text{ и т. д.}$$

т. е. докажемъ, что существуетъ окружность, которая проходитъ чрезъ всѣ вершины многоугольника ABCDE. Стало-быть, около всякаго правильнаго многоугольника можно описать окружность. Что и требовалось доказать.

Теорема 158. Во всякій правильный многоугольникъ можно вписать окружность.

Доказательство. Пусть (черт. 186) многоугольникъ ABCDE—правильный; требуется доказать, что можно провести такую окружность, которая будетъ касательною ко всѣмъ сторонамъ многоугольника.—Для доказательства этого проведемъ биссектрисы двухъ угловъ A и B, прилежащихъ къ одной сторонѣ и соединимъ точку ихъ пересѣченія, лежащую внутри многоугольника (лемма 15), съ остальными вершинами. Всѣ треугольники, при этомъ образованные, равны между собою, (см. теорему 157), т. е.

$$\triangle AOB = \triangle BOC = \triangle COD = \triangle DOE = \triangle EOA$$



Черт. 186.

Опустивъ изъ общей вершины O этихъ треугольниковъ перпендикуляры OF, OG, OH, OI и OK на стороны этихъ треугольниковъ, получимъ прямоугольные треугольники, которые всѣ равны между собою (почему?), и въ нихъ противъ равныхъ острыхъ угловъ, прилежащихъ къ сторонамъ многоугольника, лежатъ равныя прямыя OF, OG, OH, OI и OK. Стало-быть, если принять точку O за центръ, а одинъ изъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки O на стороны многоугольника, напр., перпендикуляръ OF, за радіусъ окружности, то мы получимъ окружность, которая должна пройти черезъ точки F, G, H, I и K и которая будетъ касательною къ сторонамъ даннаго правильнаго многоугольника (теорема 81), т. е. будетъ по отношенію къ нему окружностью вписанною. Стало-быть, во всякій правильный многоугольникъ можно вписать окружность. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Центры круговъ, вписаннаго и описаннаго относительно даннаго правильнаго многоугольника, совпадаютъ.—Дѣйствительно: какъ тотъ, такъ и другой центръ совпадаютъ съ точкою пересѣченія биссектрисъ двухъ угловъ, прилежащихъ къ одной сторонѣ многоугольника. А такая точка пересѣченія существуетъ только одна (слѣдствіе 2-ое теоремы 1).

Замѣчаніе. Такъ какъ центры круговъ, описаннаго около даннаго правильнаго многоугольника и вписаннаго въ него, совпадаютъ, то для нахожденія центра этихъ круговъ можно: либо найти пересѣченіе биссектрисъ двухъ угловъ, прилежащихъ къ одной изъ сторонъ многоугольника, либо найти пересѣченіе двухъ перпендикуляровъ, возставленныхъ къ двумъ смежнымъ сторонамъ даннаго многоугольника изъ средины ихъ, либо же, наконецъ, найти пересѣченіе равнодѣлящей одного изъ угловъ многоуголь-

ника съ перпендикуляромъ, возставленнымъ къ одной изъ сторонъ этого угла изъ середины ея.

Опредѣленія. Радіусъ круга, описаннаго около правильнаго многоугольника, называется *радіусомъ многоугольника*, а радіусъ круга, вписаннаго въ правильный многоугольникъ, называется *апоѳемою многоугольника*.

Теорема 159. Если въ данномъ вписаннымъ въ кругъ многоугольникѣ всѣ стороны равны между собою, то и углы его равны между собою, т. е. данный многоугольникъ есть многоугольникъ правильный.

Доказательство. Пусть (выполненіе чертежа предоставляется учащемуся) въ данномъ вписанномъ многоугольникѣ всѣ стороны AB, BC, CD, DE, EA равны между собою; требуется доказать, что это многоугольникъ правильный, т. е. что и углы его тоже между собою равны.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что

$$\smile AB = \smile BC = \smile CD = \text{ и т. д. (теорема 106),}$$

А въ такомъ случаѣ (теорема 156) данный многоугольникъ есть многоугольникъ правильный. Что и требовалось доказать.

Теорема 160. Если въ данномъ описанномъ около круга многоугольникѣ углы равны между собою, то и стороны его между собою равны, т. е. данный многоугольникъ есть многоугольникъ правильный.

Доказательство. Пусть (выполненіе чертежа предоставляется учащемуся) многоугольникъ ABCDE есть многоугольникъ описанный, а точки F, G, H, I и K—точки касанія сторонъ этого многоугольника съ окружностью и пусть углы A, B, C, D и E равны между собою; требуется доказать, что также и стороны AB, BC, CD, DE и EA равны между собою, т. е. что данный многоугольникъ есть многоугольникъ правильный.—Для доказательства этого соединимъ центръ окружности O съ вершинами многоугольника съ точками A, B, C, D и E. Такъ какъ по условію

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E,$$

то треугольники AOB, BOC, COD и т. д. треугольники равнобедренные (теоремы 130 и 59), въ которыхъ

$$AO = BO = CO = DO = EO.$$

Но углы при основаніяхъ этихъ треугольниковъ всѣ равны между собою; стало-быть, и углы при общей вершинѣ ихъ тоже между собою равны (слѣдствіе 5 теоремы 45). А въ такомъ случаѣ и всѣ треугольники AOB, BOC и т. д. равны между собою (теорема 51), и основанія ихъ также равны между собою, т. е.

$$AB = BC = CD = DE = EA;$$

стало-быть, многоугольникъ ABCDE есть многоугольникъ правильный. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Обращаемъ особенное вниманіе учащагося на то, что равноугольный вписанный и равносторонній описанный многоугольники не всегда многоугольники правильные, въ то время какъ равносторонній вписанный и равноугольный описанный всегда представляютъ собою правильные многоугольники. Примѣры: вписанный въ кругъ прямоугольникъ и описанный ромбъ.

Опредѣленіе. Правильные многоугольники одного и того же числа сторонъ наз. *одноименными* правильными многоугольниками.

Теорема 161. Одноименные правильные многоугольники подобны другъ другу.

Доказательство. Пусть два правильныхъ многоугольника имѣютъ одинаковое число сторонъ; требуется доказать, что эти многоугольники подобны.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что всѣ углы такихъ многоугольниковъ равны между собою (теорема 68 и замѣчаніе 3-е, которымъ снабжено опредѣленіе правильныхъ многоугольниковъ), а стороны, образующія эти углы, пропорціональны, потому что стороны одного изъ нихъ между собою равны, а стороны другого тоже между собою равны; стало-быть, одноименные правильные многоугольники подобны. Что и требовалось доказать.

Теорема 162. Периметры двухъ правильныхъ одноименныхъ многоугольниковъ относятся между собою какъ радіусы этихъ многоугольниковъ или же какъ ихъ апоѳемы.

Доказательство. Пусть (черт. 187) даны два одноименныхъ правильныхъ многоугольника ABCDE и FGHIK, требуется доказать, что

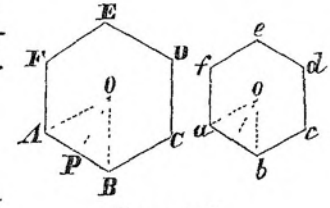
$$P_1 : P_2 = R_1 : R_2 = r_1 : r_2,$$

гдѣ символъ P_1 обозначаетъ периметръ, символъ R_1 — радіусъ, а символъ r_1 — апоѳему перваго многоугольника, символы же P_2, R_2 и r_2 — соотвѣтствующія величины во второмъ многоугольникѣ.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что $P_1 : P_2 = AB : ab$ (теоремы 149 и 161).

Но $AB : ab = R_1 : R_2 = r_1 : r_2$ (слѣдствіе 1 ое теоремы 138); стало быть (аксіома 5),

$$P_1 : P_2 = R_1 : R_2 = r_1 : r_2.$$

Что и требовалось доказать.

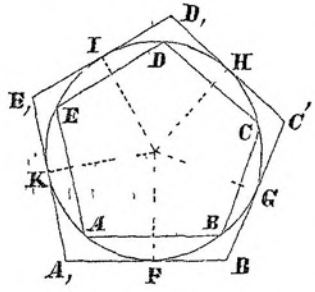


Черт. 187.

Задача 35. По данному правильному вписанному многоугольнику построить правильный одноименный многоугольникъ, описанный около того же круга.

Рѣшеніе. Задача можетъ быть разрѣшена двумя способами.

1) Пусть (черт. 188) данъ правильный вписанный мн—къ ABCDE. Опустимъ изъ центра его перпендикуляры на стороны многоугольника и продолжимъ ихъ до пересѣченія съ описанною окружностью; чрезъ точку пересѣченія перпендикуляра AB съ окружностью проведемъ касательную до пересѣченія съ касательными, проведенными чрезъ точки G и K, чрезъ точку G—касательную до пересѣченія съ касательными, проведенными чрезъ точки F и H, и т. д.



Черт. 188.

Полученный такимъ образомъ многоугольникъ будетъ требуемый.—Для того чтобы въ этомъ убѣдиться, примемъ во вниманіе, что

$$\angle KOF + \angle A = 2d \text{ (теоремы 79 и 68)}$$
$$\angle GOF + \angle B = 2d \text{ (то же)}$$

слѣдовательно (аксіома 6)

$$\angle KOF + \angle A = \angle GOF + \angle B.$$

Но по условію $\angle A = \angle B$, слѣдовательно

$$\angle KOF = \angle GOF \text{ (аксіома 8)}$$

Но съ другой стороны

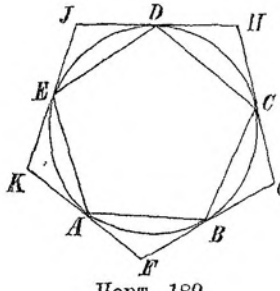
$$\angle KOF + \angle A_1 = 2d, \text{ (теоремы 79 и 68)}$$
$$\angle GOF + \angle B_1 = 2d \text{ (тоже)},$$

слѣдовательно (аксіома 6)

$$\angle KOF + \angle A_1 = \angle GOF + B_1$$

откуда, благодаря тому, что $\angle KOF = \angle GOF$, получимъ, что

$$\angle A_1 = \angle B_1.$$



Черт. 189.

Точно такъ же докажемъ, что

$$B_1 = C_1 = D_1 = E_1.$$

А въ такомъ случаѣ (теорема 160) описанный многоугольникъ $A_1\ B_1\ C_1\ D_1\ E_1$ есть многоугольникъ правильный. Въ чемъ и надлежало убѣдиться.

2) Проведемъ (черт. 189) чрезъ точку A, касательную до пересѣченія съ касательными, проведенными чрезъ точку B и E, а чрезъ точку B — касательную до пересѣченія съ касательными, проведенными чрезъ точки A и C и т. д.

Полученный такимъ образомъ многоугольникъ FGHIK и будетъ требуемый. — Для того чтобы въ этомъ убѣдиться, примемъ во вниманіе, что (теорема 125 и аксіома 11)

$$\angle BAF = \angle ABF = \angle CBG = GBC \text{ и т. д.}$$

А потому (слѣдствіе 5-ое теоремы 45)

$$\angle F = \angle G = \angle H = \angle I = \angle K,$$

и многоугольникъ FGHIK есть правильный описанный многоугольникъ. Въ чемъ и надлежало убѣдиться.

Теорема 163. Если сторона правильнаго вписаннаго многоугольника объ n сторонахъ обозначена символомъ a_n, а сторона одноименнаго правильнаго описаннаго многоугольника обозначена символомъ b_n, то

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}},$$

гдѣ R есть радіусъ вписаннаго многоугольника.

Доказательство Пусть (выполненіе чертежа предоставляется учащемуся) сторона $AB = a_n$, а параллельная ей сторона правильнаго описаннаго одноименнаго многоугольника $A_1B_1 = b_n$, и пусть OM—апоѳема стороны AB; требуется доказать, что

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}}.$$

Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что

$\triangle A_1OB_1 \infty \triangle AOB$ (слѣдствіе 1-ое теоремы 138),

откуда (теорема 162)

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{R}{OM}; \text{ но } OM = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}$$

слѣдовательно (аксіома 5)

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}}$$

Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Если D есть діаметръ круга, описаннаго вокругъ даннаго многоугольника, котораго сторона равна a_n, то при тѣхъ же значеніяхъ символовъ a_n и b_n,

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{D}{\sqrt{D^2 - a_n^2}}.$$ — Дѣйствительно: изъ теоремы 163 имѣемъ

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}},$$

т. е.

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}} = \frac{R}{\sqrt{\frac{4R^2 - a_n^2}{4}}}$$

Стало-быть,

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{2R}{\sqrt{(2R)^2 - a_n^2}}.$$

Поставивъ вмѣсто 2R букву D, получимъ, что

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{D}{\sqrt{D^2 - a_n^2}}.$$

Замѣчаніе. Пропорціи, выведенныя въ теоремѣ 163 и слѣдствіи ея, выражаютъ зависимость между тремя величинами: стороною правильнаго описаннаго многоугольника, стороною одноименнаго правильнаго вписаннаго многоугольника и радіусомъ послѣдняго. Зная двѣ изъ нихъ, легко найти третью; но тѣмъ не менѣе полезно и легко замѣтить себѣ также и слѣдующую формулу, которая выводится изъ формулы, данной въ слѣдствіи теоремы 163, и которая вполнѣ аналогична этой послѣдней формулѣ:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{D}{\sqrt{D^2 + b_n^2}}.$$

Равнымъ образомъ достойна вниманія и слѣдующая весьма изящная формула:

$$D = \frac{a_n \cdot b_n}{\sqrt{(b_n + a_n)(b_n - a_n)}}.$$

Убѣдиться въ справедливости послѣднихъ двухъ формулъ предоставляется учащемуся.

Задача 36. По данному правильному вписанному многоугольнику построить правильный многоугольникъ, вписанный въ ту же окружность, но имѣющій вдвое болѣе сторонъ.

Рѣшеніе. Пусть данъ правильный вписанный многоугольникъ ABCDE; требуется построить такой правильный вписанный многоугольникъ того же радіуса, чтобы число его сторонъ было вдвое болѣе.—Для рѣшенія этой задачи изъ центра даннаго многоугольника проводятъ перпендикуляры ко всѣмъ сторонамъ даннаго многоугольника до пересѣченія съ описанною окружностью, и каждую изъ этихъ точекъ пересѣченія соединяютъ съ двумя ближай-

[illegible] данного многоугольника.

Полученный такимъ образомъ многоугольникъ AFBGCHDIEK и будетъ требуемый.—Для того чтобы въ томъ убѣдиться, примемъ во вниманіе, что

$\smile AF = \smile FB = \smile BG = \smile GC =$ и т. д. (теорема 114),

а потому и хорды AF, FB, BG, GC и т. д. тоже равны между собою (теорема 108). Стало-быть, многоугольникъ AFBGCHDIEK есть многоугольникъ правильный (теорема 159) того же радіуса, и въ этомъ многоугольникѣ вдвое болѣе сторонъ, чѣмъ въ данномъ. Въ чемъ и надлежало убѣдиться.

Опредѣленіе. *Удвоить число сторонъ правильнаго вписаннаго многоугольника* значитъ построить такой правильный вписанный многоугольникъ, у котораго тотъ же радіусъ, но вдвое болѣе сторонъ.

Замѣчаніе. Рѣшеніе задачи 36 убѣждаетъ въ томъ, что удвоить число сторонъ правильнаго вписаннаго многоугольника всегда возможно.

Теорема 164. Если сторона правильнаго вписаннаго многоугольника объ n сторонахъ обозначена символомъ a_n, сторона правильнаго многоугольника того же радіуса, но о $2n$ сторонахъ—символомъ a_{2n}, а радіусъ ихъ—буквою R, то

$$a^2_{2n} = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a^2_n}{4}}.$$

Доказательство. Пусть (черт. 190) AB есть сторона правильнаго многоугольника объ n сторонахъ, а AC — сторона многоугольника того же радіуса, но о $2n$ сторонахъ; требуется доказать

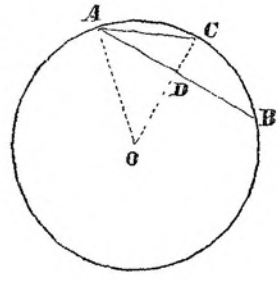
$$a^2_{2n} = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a^2_n}{4}},$$

гдѣ $a_{2n} = AC$, $a_n = AB$, $R = OA$, т. е. радіусу этихъ многоугольниковъ.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что изъ прямоугольнаго треугольника ADC (теорема 145) можно получить:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2,$$

или (аксіома 5)

$$a^2_{2n} = \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + (R - OD)^2,$$



Черт. 190.

или

$$a^2_{2n} = \frac{a^2_n}{4} + R^2 - 2R \cdot OD + OD^2;$$

Но

$$OD^2 = R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2, \quad \text{а} \quad OD = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}$$

или

$$OD^2 = R^2 - \frac{a^2_n}{4}, \quad \text{а} \quad OD = \sqrt{R^2 - \frac{a^2_n}{4}};$$

поэтому (аксіома 5)

$$a^2_{2n} = \frac{a^2_n}{4} + R^2 - 2R.\sqrt{R^2 - \frac{a_n{}^2}{4}} + R^2 - \frac{a_n{}^2}{4};$$

сдѣлавъ во второй части этого равенства приведеніе, получимъ:

$$a^2_{2n} = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a^2_n}{4}}.$$

Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе 1-ое. Болѣе изящную форму это равенство получаетъ, если выразить зависимость стороны a_{2n} отъ діаметра:

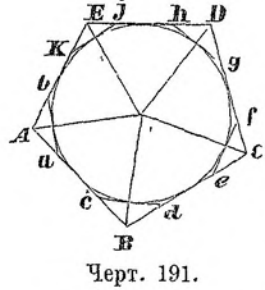
$$a^2_{2n} = \frac{D \cdot (D - \sqrt{D^2 - a^2_n})}{2}, \text{ гдѣ } D = 2R;$$

въ справедливости чего учащемуся предоставляется убѣдиться.

Замѣчаніе 2-ое. Теорему 164 можно доказать на основаніи слѣдствія 2-го теоремы 145, въ чемъ убѣдиться предоставляется учащемуся.

Задача 37. По данному правильному описанному многоугольника построить правильный описанный многоугольникъ, у котораго та же апоѳема, но вдвое бо̀льше сторонъ.

Рѣшеніе. Пусть (черт. 191) данъ правильный описанный многоугольникъ ABCDE, требуется построить правильный описанный многоугольникъ, у котораго та же апоѳема, но вдвое больше сторонъ.—Для рѣшенія этой задачи соединимъ вершины его съ центромъ O прямыми, черезъ точки пересѣченія этихъ прямыхъ съ окружностью проведемъ касательныя, которыя пересѣкутъ стороны даннаго многоугольника въ точкахъ a, b, c, d, e, f, g, h, j и k.



Черт. 191.

Полученный такимъ образомъ многоугольникъ bacdefghjk есть требуемый. — Для того чтобы въ томъ убѣдиться, прежде всего примемъ во вниманіе, что каждой изъ вершинъ даннаго многоуголь-

ника соотвѣтствуютъ двѣ вершины многоугольника вновь образованнаго; стало-быть, число сторонъ послѣдняго вдвое больше числа сторонъ даннаго. Теперь остается убѣдиться только въ томъ, что углы этого новаго многоугольника равны между собою. Для этого примемъ во вниманіе, что каждая изъ линій OA, OB, OC и т. д. дѣлитъ соотвѣтствующій уголъ пополамъ (теорема 130) и что вновь проведенныя касательныя перпендикулярны къ этой равнодѣлящей, а потому (теорема 52) оба треугольника, изъ которыхъ состоитъ $\triangle aAb$, равны между собою и углы a и b треугольника aAb также между собою равны Стало-быть, и описанные углы a и b тоже между собою равны. Точно такъ же убѣдимся. что описанные углы c и d, e и f, g и h, j и k тоже равны между собою. Теперь остается убѣдиться въ томъ, что

$$\angle a = \angle c;\ \angle d = \angle e,\ \angle f = \angle g \text{ и } \angle h = \angle j.$$

Такъ какъ по условію

$$\angle A = \angle B,$$

то

острый $\angle a =$ острому $\angle c$.

А потому и описанный $\angle a$ равенъ описанному углу c. Точно такъ же убѣдимся въ равенствѣ остальныхъ описанныхъ угловъ: a и c, d и e, f и g, и т. д. Въ чемъ и надлежало убѣдиться.

Опредѣленіе. *Удвоить число сторонъ правильнаго описаннаго многоугольника* значитъ построить правильный описанный многоугольникъ, у котораго та же апоѳема, но вдвое болѣе сторонъ.

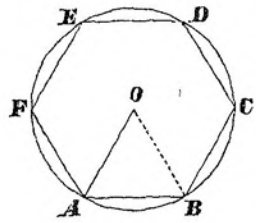
Замѣчаніе 1-ое. Рѣшеніе задачи 37 убѣждаетъ въ томъ, что удвоить число сторонъ правильнаго описаннаго многоугольника возможно.

Замѣчаніе 2-ое. Зная сторону какого-нибудь правильнаго вписаннаго многоугольника можно, на основаніи теоремы 164, вычислить стороны многоугольниковъ, полученныхъ при послѣдовательномъ удвоеніи числа сторонъ даннаго многоугольника, какъ бы далеко это удвоеніе ни продолжалось. Кромѣ того, зная сторону какого-нибудь правильнаго вписаннаго многоугольника и стороны вписанныхъ многоугольниковъ, получаемыхъ при послѣдовательномъ удвоеніи числа сторонъ его, можно, на основаніи теоремы 163, вычислить стороны правильныхъ описанныхъ многоугольниковъ соотвѣтствующаго числа сторонъ.

Теорема 165. Сторона правильнаго шестиугольника равна его радіусу.

Доказательство. Пусть (черт. 192) AB есть сторона правильнаго шестиугольника, а прямая OA его радіусъ; требуется

доказать, что AB = OA.—Для доказательства этого соединимъ центръ O съ точкою B, получимъ треугольникъ AOB, въ которомъ OA = OB. Но центральный уголъ O измѣряется $\frac{1}{6}$ долею окружности, такъ какъ AB есть сторона правильнаго шестиугольника; слѣдовательно $\angle AOB = 60^0$, и сумма угловъ A и B тр—ка AOB равна 120^0; но такъ какъ $\angle A = \angle B$ (слѣдствіе 3-е теоремы 55), то и $\angle A = 60^0$, и $\angle B = 60^0$. А потому $\triangle$ AOB есть треугольникъ равносторонній (слѣдствіе теоремы 59), и его сторона AB (она же и сторона правильнаго шестиугольника) равна радіусу этого шестиугольника. Что и требовалось доказать.



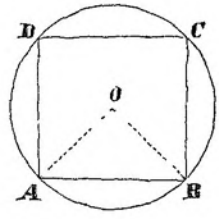
Черт. 192.

Теорема 166. Сторона квадрата равна его радіусу, помноженному на $\sqrt{2}$.

Доказательство. Для доказательства этого предположимъ, что сторона AB (черт. 193) есть сторона квадрата и обозначимъ радіусъ его буквою R. Соединимъ центръ O описаннаго круга съ вершинами A и B квадрата; получимъ $\triangle$ AOB, въ которомъ центральный уголъ O содержитъ въ себѣ 90^0, такъ какъ онъ измѣряется четвертью окружности, а потому это — уголъ прямой; стало-быть

$$AB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 \text{ (теорема 145)},$$

откуда



Черт. 193.

$$AB = \sqrt{2R^2} = \sqrt{R^2} \cdot \sqrt{2} = R \cdot \sqrt{2},$$

т. е. сторона квадрата равна радіусу его, помноженному на $\sqrt{2}$. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Какъ извѣстно изъ алгебры, $\sqrt{2}$ несоизмѣримъ съ единицею. Ср. лемму 9, стр. 96.

Задача 38. Вписать квадратъ въ данную окружность.

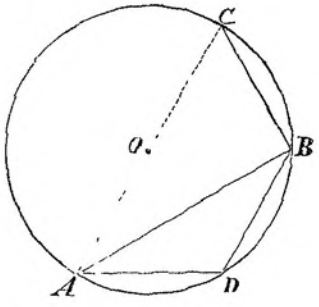
Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи проведемъ въ кругѣ два взаимно-перпендикулярныхъ діаметра. Засимъ концы взаимно-перпендикулярныхъ радіусовъ соединимъ прямыми.

Полученная такимъ образомъ фигура будетъ квадратомъ, въ которомъ проведены, кромѣ того, діагонали его.—Убѣдиться въ этомъ предоставляется учащемуся.

Теорема 167. Сторона правильнаго треугольника равняется его радіусу, помноженному на $\sqrt{3}$.

Доказательство. Пусть (черт. 194) хорды AD и DB стороны правильнаго вписаннаго шестиугольника; тогда прямая AB есть сторона правильнаго вписаннаго треугольника (почему?); пусть буквою R обозначенъ его радіусъ; требуется доказать, что

$$AB = R \cdot \sqrt{3}.$$



Черт. 194.

Для доказательства этого изъ конца A стороны AB проведемъ діаметръ, второй конецъ C діаметра AC соединимъ съ точкою B. Прямая BC есть тоже сторона правильнаго шестиугольника (почему?).
Но $\angle ABC = 90^0$ (слѣдствіе 2 теоремы 122), стало-быть,
$AB^2 = AC^2 - BC^2$ (слѣдствіе 1-ое теоремы 145); при этомъ

$$AC = 2R, \text{ а } BC = R \text{ (теорема 165);}$$

слѣдовательно (аксіома 5)

$$AB^2 = (2R)^2 - R^2 = 4R^2 - R^2,$$

откуда

$$AB^2 = 3R^2,$$

а

$$AB = \sqrt{3R^2} = \sqrt{R^2} \cdot \sqrt{3} = R \cdot \sqrt{3},$$

т. е. сторона правильнаго треугольника равна радіусу его, помноженному на $\sqrt{3}$. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Апоѳема правильнаго треугольника равна половинѣ его радіуса.—Дѣйствительно: обозначивъ сторону правильнаго треугольника символомъ a_3, а апоѳему его символомъ A_3, и соединивъ центръ треугольника съ его вершиною, получимъ

$$A_3^2 = R^2 - \left(\frac{a_3}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{a_3^2}{4},$$

но

$$a_3 = R \cdot \sqrt{3}, \text{ а } a_3^2 = 3R^2,$$

слѣдовательно (аксіома 5)

$$A_3^2 = R^2 - \frac{3R^2}{4} = \frac{R^2}{4},$$

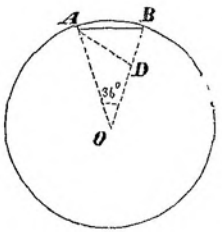
откуда

$$A = \frac{R}{2}.$$

Замѣчаніе. Та же замѣчательная зависимость между апоѳемою и радіусомъ правильнаго треугольника можетъ быть выведена не на основаніи вычисленія, а путемъ чисто-геометрическимъ, что предоставляется сдѣлать учащемуся; для достиженія этого достаточно продолжить апоѳему до пересѣченія съ окружностью и соединить центръ и эту точку пересѣченія съ одною изъ вершинъ треугольника.

Теорема 168. Сторона правильнаго десятиугольника равна большей части его радіуса, раздѣленнаго въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

Доказательство. Пусть (черт. 195) прямая AB есть сторона правильнаго вписаннаго десятиугольника; требуется доказать, что она равна бо́льшей части радіуса, раздѣленнаго въ среднемъ и крайнемъ отношеніи. — Для доказательства этого соединимъ точки A и B съ центромъ и примемъ во вниманіе, что $\triangle$ AOB есть треугольникъ равнобедренный, что



Черт. 195.

$$\angle AOB = 36^0,$$

центральный, а каждый изъ остальныхъ двухъ угловъ 72^0 (теорема 45). Раздѣливъ одинъ изъ угловъ при основаніи AB пополамъ, получимъ $\triangle$ ABD, въ которомъ по предыдущему $\angle ABD = 72^0$, а по условію $\angle BAD = 36^0$; стало-быть, и

$$\angle ADB = 72^0 \text{ (теорема 45).}$$

Мы получимъ такимъ образомъ, что $\triangle$ ABD тоже равнобедренный треугольникъ, и притомъ подобный треугольнику AOB (теорема 138), и въ этихъ треугольникахъ

$$OB : AB = AB : BD.$$

Но $\angle$ OAD треугольника OAD равенъ 36^0, а потому $\triangle$ AOD тоже треугольникъ равнобедренный, въ которомъ сторона AD равна сторонѣ OD (теорема 59); стало-быть, въ полученной нами пропорціи сторона AB правильнаго десятиугольника равна сторонѣ AD треугольника ADB и равна также сторонѣ OD треугольника ADO, а потому (аксіома 5)

$$OB : OD = OD : BD,$$

гдѣ OD равна большей части радіуса, раздѣленнаго въ среднемъ и крайнемъ отношеніи; но $OD = AB$; стало-быть, сторона пра-

вильнаго десятиугольника равна большей части радіуса, раздѣленнаго въ среднемъ и крайнемъ отношеніи. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе 1-ое. Теорема 165 даетъ намъ формулу, выражающую зависимость между стороною правильнаго шестиугольника и его радіусомъ, а благодаря теоремѣ 164 намъ дана также возможность вычислить сторону правильнаго двѣнадцатиугольника, двадцатичетырехъ-угольника и вообще всякаго правильнаго многоугольника того же радіуса, въ которомъ число сторонъ имѣетъ видъ

$$6 \cdot 2^n,$$

гдѣ n есть число цѣлое. Теорема 166 даетъ намъ формулу, выражающую зависимость между стороною квадрата и его радіусомъ, а благодаря теоремѣ 164, намъ дана также возможность вычислить сторону правильнаго восьмиугольника, шестнадцатиугольника и вообще всякаго правильнаго многоугольника того же радіуса, въ которомъ число сторонъ имѣетъ видъ

$$4 \cdot 2^n,$$

гдѣ n есть число цѣлое. Наконецъ, теорема 168 даетъ намъ формулу, выражающую зависимость между стороною правильнаго десятиугольника и его радіусомъ, а благодаря теоремѣ 164, намъ дана также возможность вычислить сторону правильнаго двадцатиугольника, сорокаугольника и вообще всякаго правильнаго многоугольника того же радіуса, въ которомъ число сторонъ имѣетъ видъ

$$10 \cdot 2^n,$$

гдѣ n есть число цѣлое.

Что касается многоугольниковъ описанныхъ, то теорема 163 даетъ намъ возможность, по сторонѣ и радіусу правильнаго вписаннаго многоугольника съ какимъ угодно числомъ сторонъ, вычислить сторону одноименнаго правильнаго многоугольника, котораго апоѳема равна радіусу даннаго правильнаго вписаннаго многоугольника.

Въ слѣдующей таблицѣ даны два точныхъ (они отмѣчены звѣздочками) и двадцать два приближенныхъ значенія чиселъ, выражающихъ полупериметры правильныхъ многоугольниковъ, число сторонъ которыхъ имѣетъ видъ:

$4 \cdot 2^n$ и $6 \cdot 2^n$, гдѣ n не болѣе 5-ти.

При этомъ для полупериметровъ вписанныхъ многоугольниковъ за единицу принятъ радіусъ, а для полупериметровъ многоугольниковъ описанныхъ — апоѳема ихъ.

Число сторонъ прав. многоуг.	Полупериметры прав. впис. многоуг.	Полупериметры прав. опис. многоуг.
4	2,82842	*4,00000
8	3,06146	3.31371
16	3,12144	3,18260
32	3,13654	3,15173
64	3,14033	3,14412
128	3,14127	3,14223
6	*3,00000	3,46411
12	3,10582	3,21540
24	3,13262	3,15967
48	3,13935	3,14609
96	3,14103	3,14272
192	3,14145	3,14188

Замѣчаніе 2-ое. Славный германскій геометръ Гауссъ († въ 1855 г.) доказалъ, что съ помощью линейки и циркуля (т. е. съ помощью прямой и окружности) окружность можетъ быть раздѣлена на n равныхъ между собою частей, если n есть число первоначальное, а $(n-1)$ при этомъ представляетъ собою степень 2-хъ, или говоря иначе, когда число n есть первоначальное число вида

$$2^p + 1.$$

Наименьшія пять первоначальныхъ чиселъ, удовлетворяющихъ этому условію, какъ въ томъ легко убѣдиться, вставивъ вмѣсто p числа отъ единицы до 16-ти включительно, суть числа:

3, 5, 17, 257, 65537.

Замѣчаніе 3-е. Для справокъ приводимъ слѣдующую таблицу формулъ, которыя легко и полезно запомнить:

$$a_3 = \mathrm{R} \cdot \sqrt{3};$$

$$a_4 = \mathrm{R} \cdot \sqrt{2};$$

$$a_5 = \mathrm{R} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}};$$

$$a_6 = \mathrm{R};$$

$$a_{10} = \frac{\mathrm{R}}{2} \cdot \left(-1 + \sqrt{5} \right);$$

гдѣ R обозначаетъ радіусъ многоугольника. Кромѣ того, полезно замѣтить, что

$$b_3 = 2a_3 \text{ и } b_4 = 2\mathrm{R};$$

въ справедливости этихъ формулъ предоставляется убѣдиться учащемуся какъ съ помощью теоремы 163, такъ и съ помощью чертежа.

§ 12. Объ измѣреніи площадей нѣкоторыхъ прямолинейныхъ фигуръ.

Опредѣленія. *Площадью* плоской замкнутой фигуры называется величина той части плоскости, которую занимаетъ данная плоская замкнутая фигура. За единицу при измѣреніи площадей принимается площадь квадрата, сторона котораго равна какой-либо единицѣ мѣры длины; единицы мѣры площадей для краткости называются *квадратными единицами*; такъ, напр., площадь квадрата, котораго сторона равна одному аршину, называется *квадратнымъ аршиномъ*; при этомъ вмѣсто того, чтобы сказать, что площадь данной фигуры равна суммѣ площадей трехъ равныхъ между квадратовъ, изъ которыхъ въ каждомъ сторона равна аршину, говорятъ: площадь данной фигуры равна тремъ квадратнымъ аршинамъ.—*Основаніемъ прямоугольника* называется любая изъ сторонъ прямоугольника, но при этомъ любая изъ двухъ сторонъ, перпендикулярныхъ къ основанію, называется *высотою* его; какая изъ сторонъ принимается при этомъ за основаніе—безразлично. Если изъ вершины треугольника опущенъ перпендикуляръ на противолежащую сторону до пересѣченія съ нею, то послѣдняя называется *основаніемъ*, а перпендикуляръ—*высотою* тр—ка. Если изъ

точки, взятой на одной изъ сторонъ параллелограмма опущенъ перпендикуляръ на параллельную ей сторону того же параллелограмма до пересѣченія съ нею, то эта послѣдняя сторона параллелограмма называется *основаніемъ*, а *перпендикуляръ*— высотою его.

Лемма 16. Если двѣ плоскія замкнутыя фигуры равны между собою (совмѣстимы), то и площади ихъ между собою равны.

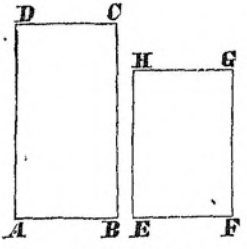
Доказательство. Пусть (чертежа въ этомъ случаѣ не требуется) двѣ какія-либо плоскія замкнутыя фигуры равны между собою, т. е. совмѣстимы; требуется доказать, что и площади ихъ между собою равны.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что эти фигуры могутъ быть наложены каждая на другую такъ, чтобы всѣ точки одной совпали съ точками другой (теорема 2). Стало-быть, обѣ занимаютъ равныя по величинѣ части плоскости, т. е. площади обѣихъ фигуръ равны между собою. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Когда въ формулѣ идетъ рѣчь не о самой фигурѣ, а объ ея площади, то мы это будемъ обозначать сокращеніемъ слова „площадь", а именно такъ: пл. ABC или пл. ABCD.

Теорема 169. Если въ двухъ прямоугольникахъ основанія равны между собою, то площадь одного изъ прямоугольниковъ относится къ площади другого какъ высота перваго относится къ высотѣ второго.

Доказательство. Пусть (черт. 196) въ прямоугольникахъ ABCD и EFGH основанія AB и EF равны между собою; требуется доказать, что

пл. ABCD : пл. EFGH = AB : EF.



Черт. 196.

При доказательствѣ этой теоремы различаютъ два случая: 1) когда высоты AB и EF соизмѣримы одна съ другою, и 2) когда онѣ одна съ другою несоизмѣримы.

1) Пусть BC и GF соизмѣримы одна съ другою. Это значитъ, что существуетъ такая конечная прямая a, которая содержится въ каждой изъ высотъ цѣлое число разъ: напр., въ высотѣ перваго прямоугольника—m разъ, а въ высотѣ втораго—n разъ. Раздѣлимъ высоту BC на m равныхъ между собою частей, а высоту FG—на n равныхъ между собою частей и проведемъ черезъ точки дѣленія прямыя, параллельныя основанію. Мы такимъ образомъ раздѣлимъ каждый изъ данныхъ прямоугольниковъ на равные между собою прямоугольники (почему?), а также каждую изъ площадей данныхъ прямоугольниковъ на равныя между

собою части (лемма 16), а именно: площадь прямоугольника ABCD на m равныхъ между собою площадей, а площадь прямоугольника EFGH на n такихъ же точно равныхъ между собою частей; поэтому

$$\text{пл. ABCD} : \text{пл. EFGH} = m : n;$$

но, по условію,

$$BC : FG = m : n,$$

а потому (аксіома 6)

$$\text{пл. ABCD} : \text{пл. EFGH} = BC : FG.$$

Что и требовалось доказать.

2) Въ случаѣ, когда высоты BC и GF несоизмѣримы одна съ другою, доказательство ведется тѣмъ же путемъ, которымъ оно ведется въ теоремахъ 119 и 131, т. е. способомъ приведенія къ нелѣпости. Это предоставляется учащемуся.

Слѣдствіе. Если въ двухъ прямоугольникахъ высоты равны между собою, то площади этихъ прямоугольниковъ относятся между собою, какъ ихъ основанія.—Дѣйствительно: если высоты двухъ прямоугольниковъ равны между собою, то, принявъ высоты за основанія, а основанія—за высоты, получимъ пропорцію, свидѣтельствующую о томъ, что площади данныхъ прямоугольниковъ относятся между собою, какъ ихъ первоначальныя основанія.

Теорема 170. Площадь всякаго прямоугольника относится къ площади другого прямоугольника, какъ произведеніе изъ основанія на высоту перваго изъ нихъ относится къ произведенію изъ основанія на высоту второго, если эти основанія и высоты измѣрены одною и тою же единицею мѣры длины.

Доказательство. Пусть (черт. 197) даны два прямоугольника ABCD и EFGH; требуется доказать, что

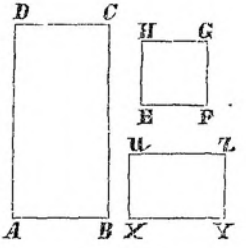
пл. ABCD : пл. EFGH = AB . BC : EF . FG,

если основанія и высоты измѣрены одною и тою же единицею мѣры.—Для доказательства этого построимъ прямоугольникъ XYZU, котораго основаніе XY равно основанію перваго прямоугольника, а высота его YZ равна высотѣ второго. Получимъ слѣдующія пропорціи:

пл. ABCD : пл. XYZU = BC : YZ (теор. 169)

пл. XYZU : пл. EFGH = XY : EF (слѣдствіе теоремы 169); перемноживъ почленно эти пропорціи, получимъ:

пл. : ABCD . пл. XYZU : пл. XYZU . пл. EFGH = BC . XY : YZ . EF.



Черт. 197.

Но въ членахъ перваго отношенія есть общій множитель, который можно сократить, а во второмъ отношеніи, по положенію,

$$XY = AB, \text{ а } YZ = FG.$$

Сдѣлавъ сказанное сокращеніе, получимъ (аксіома 5) пропорцію:

пл. ABCD : пл. EFGH = AB . BC : EF . FG.

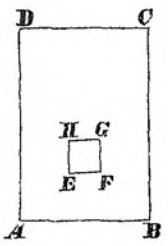
Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Когда помножаютъ площадь на площадь (см. доказательство теоремы 170), то при этомъ умножается собственно не самая площадь *одной фигуры на площадь другой* (*это—невозможно*), а перемножаются только отвлеченныя числа, выражающія отношенія этихъ площадей къ единицѣ площадей. (Ср. замѣчаніе 1-ое, которымъ снабжена теорема 131, а также теорему 171).

Опредѣленіе. Условимся *одноименными единицами разнаго рода* называть единицу мѣры длины и единицу мѣры площадей въ томъ случаѣ, если сторона квадрата, площадь котораго принята за единицу мѣры площадей, равна данной единицѣ мѣры длины. Такъ, напр., аршинъ и квадратный аршинъ суть одноименныя единицы разнаго рода; таковы, кромѣ того, метръ и квадратный метръ, дюймъ и квадратный дюймъ, и т. д.

Теорема 171. Въ площади прямоугольника содержится столько-же квадратныхъ единицъ, сколько отвлеченныхъ единицъ содержится въ произведеніи чиселъ, полученныхъ отъ измѣренія основанія и высоты даннаго прямоугольника одноименною единицею мѣры длины.

Доказательство. Пусть (черт. 198) единица мѣры длины содержится въ основаніи m разъ, а въ высотѣ n разъ; требуется доказать, что въ площади этого прямоугольника одноименная квадратная единица содержится $m \,.\, n$ разъ.—*Для доказательства этого* представимъ себѣ квадратъ EFGH, котораго сторона равняется той единицѣ мѣры длины, которою измѣрены основаніе и высота даннаго прямоугольника. Тогда (теорема 170)



Черт. 198.

пл. ABCD : пл. EFGH = AB . BC : EF . GH, т. е.

пл. ABCD : пл. EFGH = $m \,.\, n$: 1 . 1,

или

пл. ABCD : пл. EFGH = $m \,.\, n$,

т. е. квадратная единица EFGH содержится въ данной площади столько разъ, сколько отвлеченныхъ единицъ содержится въ произведеніи чиселъ, полученныхъ при измѣреніи основанія и высоты даннаго прямоугольника одноименною единицею мѣры длины. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Площадь квадрата содержитъ въ себѣ столько квадратныхъ единицъ мѣры, сколько отвлеченныхъ единицъ содержится въ квадратѣ отвлеченнаго числа, полученнаго по измѣре-

ніи стороны даннаго квадрата одноименною единицею мѣры.— Дѣйствительно: если даны квадратъ ABCD и квадратъ EFGH, и стороны послѣдняго равны единицѣ мѣры длины, а въ сторонѣ квадрата ABCD единица мѣры длины EF содержится m разъ, то (теорема 171)

$$\text{пл. ABCD} : \text{пл. EFGH} = m \,.\, m = m^2.$$

Замѣчаніе 1-ое. Теорема 171 и слѣдствіе ея справедливы какъ для цѣлыхъ значеній чиселъ m и n, такъ и для дробныхъ и несоизмѣримыхъ, такъ какъ теорема 170, на которой основана ихъ доказательство, справедлива для цѣлыхъ, дробныхъ и несоизмѣримыхъ значеній чиселъ, выражающихъ отношенія основаній и высотъ къ единицѣ мѣры длины.

Замѣчаніе 2-ое. Теорему 171 обыкновенно, для краткости, выражаютъ такъ: площадь прямоугольника измѣряется произведеніемъ его основанія на высоту, или еще короче такъ: площадь прямоугольника равна произведенію его основанія на высоту. Слѣдствіе теоремы 171 обыкновенно, для краткости, выражаютъ слѣдующимъ образомъ: площадь квадрата равна квадрату его стороны. Согласно съ этими сокращенными выраженіями, пишутъ также

$$\text{пл. ABCD} = m \,.\, n \text{ и пл. CDEF} = p^2,$$

причемъ первыя части этихъ равенствъ, какъ и равно и вторыя выражаютъ извѣстныя отвлеченныя числа.

Теорема 172. Если произведеніе двухъ прямыхъ равно произведенію другихъ двухъ прямыхъ, то площадь прямоугольника, котораго основаніе и высота равны первымъ двумъ прямымъ, равна площади прямоугольника, котораго основаніе и высота порознь равны остальнымъ двумъ прямымъ.

Доказательство. Пусть a, b, c и d обозначаютъ четыре прямыхъ линій и пусть

$$a \,.\, b = c \,.\, d;$$

требуется доказать, что прямоугольникъ, котораго основаніе и высота соотвѣтственно равны прямымъ a и b, равновеликъ прямоугольнику, котораго основаніе и высота соотвѣтсвенно равны прямымъ c и d.—Для доказательства этого построимъ прямоугольникъ, котораго основаніе и высота равны a и b, и прямоугольникъ, котораго основаніе и высота равны c и d, и обозначимъ первый многоугольникъ буквою M, а второй буквою N; тогда

$$\left.\begin{array}{l} \text{пл. M} = a \,.\, b \\ \text{пл. N} = c \,.\, d \end{array}\right\} \text{ (теорема 171);}$$

а

но по условію

$$a \,.\, b = c \,.\, d$$

слѣдовательно (аксіома 6)

пл. M = пл. N.

Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Если сторона квадрата есть средняя пропорціональная между основаніемъ и высотою прямоугольника, то площади обѣихъ фигуръ равны между собою.—Дѣйствительно: если (выполненіе чертежа предоставляется учащемуся) сторона AB квадрата ABCD есть средняя пропорціональная между основаніемъ EF и высотою FG прямоугольника EFGH, т. е. если

EF : AB = AB : FG,

то

AB . AB = EF : FG.

Слѣдовательно

пл. ABCD = пл. EFGH (теорема 172).

Опредѣленіе. Двѣ плоскія замкнутыя фигуры, которыхъ площади равны между собою, называются *равновеликими* (или равномѣрными) *фигурами*, независимо отъ того, равны-ли онѣ другъ другу или не равны, т. е. совмѣстимы ли онѣ или нѣтъ.

Замѣчаніе 1-ое. Теорема 172 доказываетъ, что существуютъ прямоугольники, хотя и не совмѣстимые одинъ съ другимъ, но равновеликіе; таковы, напр., квадратъ и прямоугольникъ, въ которыхъ сторона квадрата есть средняя пропорціональная между основаніемъ и высотою прямоугольника. Въ существованіи вообще не совмѣстимыхъ другъ съ другомъ, но равновеликихъ фигуръ можно, впрочемъ, убѣдиться и слѣдующимъ образомъ: всякую фигуру можно произвольною прямою раздѣлить на двѣ произвольныя части; послѣ этого можно, отнявъ одну изъ этихъ частей отъ фигуры, произвольнымъ образомъ приложить къ оставшейся фигурѣ отнятую такъ, чтобы фигура получилась иная, но чтобы площадь новой фигуры состояла изъ тѣхъ же частей, что и площадь первоначально данной; тогда фигуры не совмѣстимы, но равновелики.

Замѣчаніе 2-ое. Равныя между собою, т. е. совмѣстимыя, фигуры равновелики (лемма 16); но, кромѣ того, равныя между собою, т. е. совмѣстимыя фигуры также подобны другъ другу (замѣчаніе 2-ое, которымъ снабжена теорема 139). Вотъ почему нѣкоторые авторы для обозначенія на письмѣ равенства (совмѣстимости) двухъ фигуръ употребляютъ двойной знакъ $\overset{\infty}{=}$ (ср. замѣчаніе 3-е относительно равныхъ тр—ковъ, стр. 44); при этомъ одинъ знакъ обозначаетъ равновеликость, а другой—подобіе данныхъ фигуръ. Въ настоящемъ сочиненіи равенство (совмѣстимость) фигуръ обозначается знакомъ равенства, равновеликость же—указаніемъ на то, что *площадь* одной фигуры равна *площади*

другой. Употребленіе знака ∞ для обозначенія совмѣстимости фигуръ основано на томъ, что если двѣ фигуры и равновелики, и подобны одна другой, то онѣ также и совмѣстимы; но въ этомъ сочиненіи это обозначеніе не практикуется.

Замѣчаніе 3-е. Вдумавшись въ смыслъ слѣдствій 3-го, 4-го и 5-го теоремы 138 и въ смыслъ теоремъ 144 и 145, легко убѣдиться, что всѣ эти предложенія могутъ быть истолкованы въ томъ смыслѣ, что прямоугольники, построенные извѣстнымъ образомъ, равновелики другимъ прямоугольникамъ. Такъ, напр., мы легко убѣдимся, что прямоугольникъ, котораго основаніе равно сѣкущей, а высота—ея внѣшней части, равновеликъ квадрату, котораго сторона равна касательной, проведенной изъ той же точки. Точно также прямоугольникъ, котораго основаніе равно всей прямой, раздѣленной въ среднемъ и крайнемъ отношеніи, а высота—меньшей ея части, равновеликъ квадрату, котораго сторона равна большей его части; прямоугольники, котораго основаніе и высота равны діагоналямъ вписаннаго въ кругъ четыреугольника, равновеликъ суммѣ двухъ прямоугольниковъ, въ одномъ изъ которыхъ основаніе и высотъ равны двумъ противолежащимъ сторонамъ четыреугольника, а ва другомъ—остальнымъ двумъ сторонамъ (Птоломеева теорема, 153). И т. д.

Теорема 173. Если въ косоугольномъ параллелограммѣ и въ прямоугольникѣ основанія равны между собою и высоты тоже между собою равны, то эти фигуры равновелики.

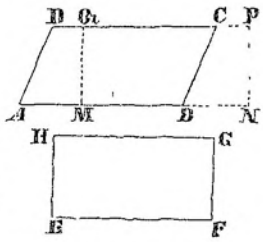
Доказательство. Пусть (черт. 199) даны косоугольный параллелограммъ ABCD и прямоугольникъ EFGH и пусть

$$AB = EF, \text{ а } MQ = FG;$$

требуется доказать, что

$$\text{пл. } ABCD = \text{пл. } EFGH.$$

Для доказательства этого продолжимъ прямую AB и на продолженіи отложимъ прямую BN равную прямой AM; изъ точки N возставимъ перпендикуляръ NP до пересѣченія съ продолженіемъ прямой DC. Наложеніемъ легко убѣдиться, что



Черт. 199.

$$\text{фигура } AMQD = \text{фигурѣ } BNPC;$$

но

$$\text{пл. } MBCQ = \text{пл. } MBCQ \text{ (аксіома 1)}$$

а

$$\text{пл. } AMQD = \text{пл. } BNPC \text{ (лемма 16)};$$

стало-быть (аксіома 8)

$$\text{пл. } MBCQ + \text{пл. } AMQD = \text{пл. } MBCQ + \text{пл. } BNPC,$$

откуда (аксіома 2)

пл. ABCD = пл. MNPQ;

но

пл. MNPQ = пл. EFGH (теорема 171);

стало-быть (аксіома 5)

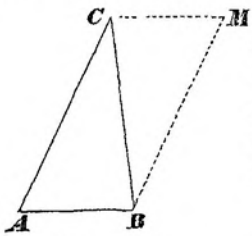
пл. ABCD = пл. EFGH.

Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1-ое. Площадь параллелограмма равняется произведенію изъ его основанія на высоту.—Дѣйствительно: площадь параллелограмма ABCD равна площади прямоугольника EFGH, имѣющаго то же основаніе и ту же высоту, а площадь этого послѣдняго равна произведенію изъ его основанія на высоту, а потому и площадь параллелограмма равна тому же произведенію.

Слѣдствіе 2-ое. Параллелограммы, имѣющіе общія основанія и равныя высоты, равновелики.—Дѣйствительно: каждый изъ этихъ параллелограммовъ равновеликъ прямоугольнику, имѣющему то же основаніе и ту же высоту, стало-быть, всѣ они равновелики.

Слѣдствіе 3-ье. Площадь треугольника равняется половинѣ произведенія изъ его основанія на высоту.—Дѣйствительно: пусть (данъ △ ABC черт. 200); проведя изъ точки C прямую параллельно къ AB, а изъ точки B — параллельно къ AC, и продолживъ эти прямыя до взаимнаго ихъ пересѣченія въ точкѣ M, получимъ параллелограммъ ABMC, котораго площадь равняется произведенію изъ его основанія на высоту, т. е.

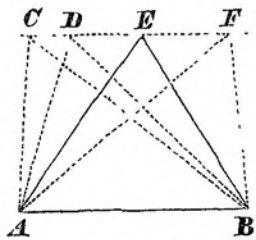


Черт. 200.

$$\text{пл. ABMC} = \text{AB} \cdot h,$$

гдѣ буква h обозначаетъ высоту какъ параллелограмма, такъ и треугольника ABC, разъ прямая AB принята за основаніе. Но

$$\text{пл. ABC} = \frac{\text{пл. ABMC}}{2} \text{ (теорема 52 и лемма 16);}$$



Черт. 201.

слѣдовательно (аксіома 5)

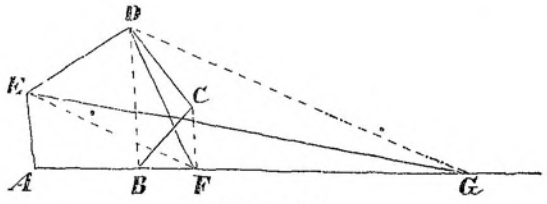
$$\text{пл. ABC} = \frac{\text{AB} \cdot h}{2}.$$

Слѣдствіе 4-ое. Треугольники, у которыхъ общія основанія и которыхъ вершины, противолежащія этому основанію, лежатъ на одной и той же прямой, параллельной къ основанію, равновелики.—Дѣйствительно: (черт. 201) треугольники ACB, ADB, AEB, AFB должны быть равновелики, если у нихъ общее основаніе AB, а вершины

C, D, E, F лежатъ на одной и той-же прямой, параллельной основанію, потому что площадь каждаго изъ нихъ равняется половинѣ произведенія изъ одного и того же основанія на одну и ту же высоту (слѣдствіе 3-е).

Задача 39. Построить треугольникъ, равновеликій данному многоугольнику ABCDE (черт. 202).

Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи продолжимъ сторону AB, соединимъ вершину D съ точкою B и проведемъ прямую CF параллельно къ DB до пересѣченія съ продолженіемъ прямой AB въ точкѣ F; соединимъ точку F съ точкою E и изъ точки D проведемъ прямую DG параллельно къ EF до пересѣченія съ продолженіемъ прямой AB въ точкѣ G. Соединимъ точку E съ точкою G.



Черт. 202.

Треугольникъ AEG, равновеликій многоугольнику ABCDE, и есть требуемый треугольникъ. —Для того чтобы въ томъ убѣдиться, примемъ во вниманіе, что

пл. DBF = пл. DBC (слѣдствіе 4-ое теоремы 173),

но

пл. ABDE = пл. ABDE (аксіома 1),

слѣдовательно (аксіома 8)

пл. AFDE = пл. ABCDE.

Но

пл. AFDE = пл. AFE + пл. EFD (аксіома 2)

а

пл. EFD = пл. EFG (слѣдствіе 4-ое теоремы 173);

слѣдовательно (аксіома 2)

пл. AFDE = пл. AFE + пл. EFG = пл. AEG.

А потому (аксіома 5)

пл. AEG = пл. ABCDE,

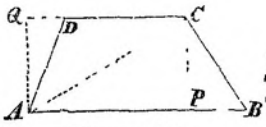
въ чемъ и надлежало убѣдиться.

Замѣчаніе. Задача 39 можетъ быть разрѣшена также и иначе, и учащемуся рекомендуется побольше упражненій въ этомъ направленіи.

Теорема 174. Площадь трапеціи равняется произведенію изъ полусуммы ея основаній на ея высоту.

Доказательство. Пусть (черт. 203) дана трапеція ABCD, въ которой AB и CD суть *основанія*; *требуется доказать*, что

$$\text{пл. ABCD} = \frac{AB + DC}{2} \cdot CP.$$



Черт. 203.

Для доказательства этого проведемъ діагональ трапеціи AC; мы раздѣлимъ такимъ образомъ трапецію на два треугольника ABC и ACD.

$$\left.\begin{aligned}\text{пл. ABC} &= \frac{AB \cdot CP}{2}\\ \text{пл. ACD} &= \frac{DC \cdot AQ}{2}\end{aligned}\right\} \text{(слѣдствіе 3-ье теоремы 173);}$$

стало-быть (аксіома 8)

$$\text{пл. ABCD} = \frac{AB \cdot CP}{2} + \frac{DC \cdot AQ}{2}.$$

Но

$$CP = AQ \text{ (слѣдствіе теоремы 69);}$$

слѣдовательно (аксіома 5)

$$\text{пл. ABCD} = \frac{AB \cdot CP}{2} + \frac{DC \cdot CP}{2},$$

откуда

$$\text{пл. ABCD} = \frac{AB \cdot CP + DC \cdot CP}{2} = \frac{(AB + DC) \cdot CP}{2}$$

или

$$\text{пл. ABCD} = \frac{AB + DC}{2} \cdot CP.$$

Что и требовалось доказать.

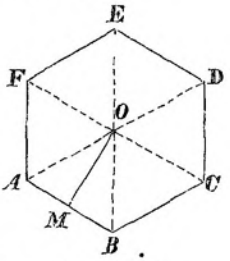
Слѣдствіе. Площадь трапеціи равна произведенію конечной прямой, соединяющей средины параллельныхъ сторонъ ея, на высоту трапеціи.—Дѣйствительно: площадь трапеціи равняется произведенію изъ полусуммы основаній на высоту; но полусумма основаній трапеціи равна прямой, соединяющей средины не параллельныхъ сторонъ ея (теорема 76); а потому площадь трапеціи равна произведенію прямой, соединяющей средины непараллельныхъ сторонъ ея, на высоту трапеціи.

Теорема 175. Площадь правильнаго многоугольника равна половинѣ произведенія изъ его периметра на его апоѳему.

Доказательство. Пусть (черт. 204) данъ правильный многоугольникъ ABCDEF и пусть апоѳема его OM обозначена буквою

А, число его сторонъ буквою n, а каждая изъ этихъ сторонъ—буквою a, периметръ—буквою p, требуется доказать, что

$$\text{пл. ABCDEF} = \frac{p \,.\, A}{2}.$$



Черт. 204.

Для доказательства этого соединимъ центръ О этого многоугольника съ вершинами его; получимъ n равнобедренныхъ треугольниковъ, которые всѣ равны между собою и въ которыхъ основаніемъ каждаго служитъ сторона многоугольника, а высотою — апоѳема многоугольника. А потому

$$\text{пл. ABCDE} = \frac{a \,.\, A}{2} \,.\, n, \text{ т. е. пл. ABCDE} = \frac{n \,.\, a \,.\, A}{2} = \frac{p \,.\, A}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 176. Если въ двухъ треугольникахъ уголъ одного изъ нихъ равенъ углу другого, то площадь одного треугольника относится къ площади другого какъ произведеніе сторонъ, образующихъ этотъ уголъ въ первомъ изъ нихъ, относится къ произведенію сторонъ, образующихъ его въ другомъ.

Доказательство. Пусть (выполненіе чертежа предоставляется учащемуся) въ треугольникахъ ABC и DEF углы A и D равны между собою; требуется доказать, что

$$\text{пл. ABC} : \text{пл. DEF} = \text{AB} \,.\, \text{AC} : \text{DE} \,.\, \text{DF}.$$

Для доказательства этого проведемъ изъ точекъ C и F высоты треугольниковъ CP и FQ; получимъ (слѣдствіе 3-е теоремы 173):

$$\text{пл. ABC} = \frac{\text{AB} \,.\, \text{CP}}{2}, \text{ а пл. DEF} = \frac{\text{DE} \,.\, \text{FQ}}{2}$$

Откуда (аксіома 8)

$$\frac{\text{пл. ABC}}{\text{пл. DEF}} = \frac{\text{AB} \,.\, \text{CP}}{\text{DE} \,.\, \text{FQ}} = \frac{\text{AB}}{\text{DE}} \cdot \frac{\text{CP}}{\text{FQ}};$$

но $\triangle$ ACP ∞ $\triangle$ DFQ (слѣдствіе 2-ое теоремы 138), и въ нихъ

$$\frac{\text{CP}}{\text{FQ}} = \frac{\text{AC}}{\text{DF}};$$

стало-быть (аксіома 5)

$$\frac{\text{пл. ABC}}{\text{пл. DEF}} = \frac{\text{AB}}{\text{DE}} \cdot \frac{\text{AC}}{\text{DF}} = \frac{\text{AB} \,.\, \text{AC}}{\text{DE} \,.\, \text{DF}}.$$

Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Площади двухъ подобныхъ треугольниковъ относятся между собою какъ квадраты ихъ сходственныхъ сторонъ.—Дѣйствительно: если треугольники ABC и DEF подобны и если

$$\angle \text{A} = \angle \text{D}, \ \angle \text{B} = \angle \text{E}, \text{ а } \angle \text{C} = \angle \text{F},$$

то по предыдущей теоремѣ

$$\text{пл. ABC} : \text{пл. DEF} = \text{AB} \cdot \text{BC} : \text{DE} \cdot \text{EF}$$

или

$$\frac{\text{пл. ABC}}{\text{пл. DEF}} = \frac{\text{AB} \cdot \text{BC}}{\text{DE} \cdot \text{EF}} = \frac{\text{AB}}{\text{DE}} \cdot \frac{\text{BC}}{\text{EF}}$$

но, по условію, $\text{BC} : \text{EF} = \text{AB} : \text{DE}$;

стало-быть,

$$\frac{\text{пл. ABC}}{\text{пл. DEF}} = \frac{\text{AB}}{\text{DE}} \cdot \frac{\text{AB}}{\text{DE}} = \frac{\text{AB}^2}{\text{DE}^2},$$

или

$$\text{пл. ABC} : \text{пл. DEF} = \text{AB}^2 : \text{DE}^2.$$

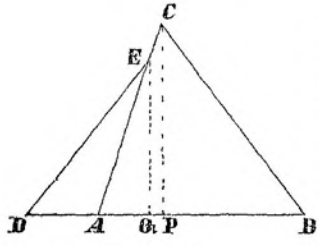
Замѣчаніе. Подобное же соотношеніе площадей двухъ тр—ковъ существуетъ и въ томъ случаѣ, если уголъ одного треугольника дополняетъ уголъ другого до двухъ прямыхъ. Доказательство ведется тѣмъ же путемъ. Такъ, если (черт. 205)

$$\angle \text{DAE} + \angle \text{CAB} = 2d,$$

то

$$\text{пл. DAE} : \text{пл. CAB} = \text{DA} \cdot \text{AE} : \text{AC} \cdot \text{AB}.$$

Доказательство предоставляется вывести учащемуся.



Черт. 205.

Теорема 177. Площади двухъ подобныхъ многоугольниковъ относятся между собою какъ квадраты ихъ сходственныхъ сторонъ.

Доказательство. Пусть (выполненіе чертежа предоставляется учащемуся) многоугольники ABCDE.... и *abcde*.... подобны и пусть AB и *ab* сходственныя стороны ихъ; требуется доказать, что

$$\frac{\text{пл. ABCDE....}}{\text{пл. } abcde....} = \frac{\text{AB}^2}{ab^2}.$$

Для доказательства этого проведемъ всѣ діагонали изъ двухъ соотвѣтствующихъ вершинъ ихъ; мы такимъ образомъ раздѣлимъ многоугольники на одинаковое число подобныхъ и подобнымъ образомъ расположенныхъ треугольниковъ (теорема 150), при чемъ

$$\frac{\text{пл. ABC}}{\text{пл. } abc} = \frac{\text{AB}^2}{ab^2}$$

$$\frac{\text{пл. ACD}}{\text{пл. } acd} = \frac{\text{AC}^2}{ac^2}$$

$$\frac{\text{пл. ADE}}{\text{пл. } ade} = \frac{\text{AD}^2}{ad^2}.$$ И т. д.

Но вторыя отношенія этихъ пропорцій равны между собою вслѣдствіе подобія полученныхъ треугольниковъ; стало-быть, можно сложить эти пропорціи почленно, откуда получимъ

$$\frac{\text{пл. ABC} + \text{пл. ACD} + \text{и т. д.}}{\text{пл. } abc + \text{пл. } acd + \text{и т. д.}} = \frac{AB^2}{ab^2},$$

т. е.

$$\frac{\text{пл. ABCDE....}}{\text{пл. } abcde....} = \frac{AB^2}{ab^2}.$$

Что и требовалось доказать.

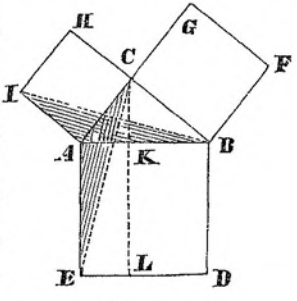
Слѣдствіе 1-ое. Площади одноименныхъ правильныхъ многоугольниковъ относятся между собою какъ квадраты ихъ радіусовъ и какъ квадраты ихъ апоѳемъ.—Дѣйствительно: площади этихъ многоугольниковъ относятся между собою какъ квадраты сходственныхъ сторонъ (теоремы 161 и 177), а эти послѣдніе квадраты относятся какъ квадраты радіусовъ и апоѳемъ (теорема 162). Поэтому площади одноименныхъ правильныхъ многоугольниковъ относятся между собою какъ квадраты ихъ радіусовъ и какъ квадраты ихъ апоѳемъ.

Опредѣленіе. *Построить фигуру на данной конечной прямой* значитъ построить такую фигуру, которой сторона была бы равна данной конечной прямой.

Теорема 178. Квадратъ, построенный на гипотенузѣ какого-угодно прямоугольнаго треугольника, равновеликъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на его катетахъ.

Доказательство. Пусть (черт. 206) $\triangle$ ABC есть треугольникъ прямоугольный, $\angle$ C уголъ прямой, фигуры ABDE, CGFB и ACIH квадраты; требуется доказать, что

$$\text{пл. AD} = \text{пл. AH} + \text{пл. BG}.$$



Черт. 206.

Для доказательства этого изъ вершины C прямого угла проведемъ перпендикуляръ къ гипотенузѣ и продолжимъ этотъ перпендикуляръ до пересѣченія со стороною квадрата, параллельной гипотенузѣ. Пусть точки K и L точки пересѣченія перпендикуляра съ гипотенузой AB и съ прямой ED.

Докажемъ, что площадь прямоугольника AKLE равна площади квадрата AH. Для этого соединимъ точку E съ точкою C, а точку I съ точкою B; тогда получимъ два треугольника AEC и ABI, которые, для большей ясности, на чертежѣ заштрихованы. Въ этихъ треугольникахъ AI = AC, какъ стороны одного и того

же квадрата, AB = AE, по той же причинѣ, а ∠ EAC = ∠ BAI (почему?). Слѣдовательно (теорема 51)

$$\triangle EAC = \triangle BAI$$

Но

$$\left.\begin{aligned} \text{пл. } \triangle EAC &= \frac{\text{пл. AKLE}}{2} \\ \text{а} \qquad \text{пл. } \triangle BAI &= \frac{\text{пл. ACHI}}{2} \end{aligned}\right\} \text{(слѣдствіе 3-е теоремы 173).}$$

стало-быть (аксіома 6)

$$\frac{\text{пл. AKLE}}{2} = \frac{\text{пл. ACHI}}{2}$$

или

$$\text{пл. AKLE} = \text{пл. ACHI} \text{ (почему?).}$$

Точно такъ же докажемъ, что

$$\text{пл. BCFG} = \text{пл. BKLD,}$$

откуда (аксіома 8)

$$\text{пл. AH} + \text{пл. BG} = \text{пл. AD,}$$

или

$$\text{пл. AD} = \text{пл. AH} + \text{пл. BG,}$$

т. е. квадратъ, построенный на гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, равновеликъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на его катетахъ. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Теорема 178, извѣстная въ наукѣ подъ названіемъ Пиѳагоровой теоремы по имени греческаго философа Пиѳагора, жившаго въ VI вѣкѣ до Р. Х., доказана въ разное время многими различными способами. Выше (теорема 145) она доказана въ иной формѣ на основаніи свойства перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины прямого угла прямоугольнаго треугольника на его гипотенузу.

Теорема 179. Если на гипотенузѣ и катетахъ прямоугольнаго треугольника построены подобные многоугольники и притомъ такъ, что гипотенуза и катеты этихъ многоугольниковъ представляютъ собою сходственныя ихъ стороны, то многоугольникъ, построенный на гипотенузѣ, равновеликъ суммѣ многоугольниковъ, построенныхъ на катетахъ.

Доказательство. Пусть (выполненіе чертежа предоставляется учащемуся) на гипотенузѣ AB и катетахъ BC и CA прямоугольнаго треугольника ABC построены подобные многоугольники ABCDEF, CBGHIJ и CKLMNO, и притомъ такъ, что стороны AB, BC и AC суть сходственныя ихъ стороны; требуется доказать, что площадь многоугольника, построеннаго на гипотенузѣ, равна суммѣ площадей остальныхъ двухъ.—Для доказательства этого обозна-

чимъ площадь многоугольника, построеннаго на гипотенузѣ, буквою Q, а площади многоугольниковъ, построенныхъ на катетахъ, обозначены буквами q и q_1; такъ какъ (теорема 177)

$$\frac{q}{Q} = \frac{AC^2}{AB^2} \quad \text{а} \quad \frac{q_1}{Q} = \frac{BC^2}{AB^2},$$

то (аксіома 8)

$$\frac{q + q_1}{Q} = \frac{AC^2 + BC^2}{AB^2}.$$

Но

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \text{ (теорема 145)};$$

стало-быть,

$$\frac{AC^2 + BC^2}{AB^2} = 1, \text{ а потому (аксіома 5) } \frac{q + q_1}{Q} = 1,$$

откуда

$$q + q_1 = Q, \text{ а } Q = q + q_1.$$

Что и требовалось доказать.

§ 13. Способъ предѣловъ и его примѣненіе къ ученію о длинѣ окружности и площади круга.

Опредѣленія. Если какая-либо величина поставлена въ такія условія, что она сохраняетъ одно и то же значеніе, то она называется *постоянной величиною*; если же она поставлена въ такія условія, что можетъ принимать значенія различныя, то она въ такомъ случаѣ называется *перемѣнною*.

Такъ, напр., если какая-нибудь неподвижная хорда нѣкотораго круга представляетъ собою сторону нѣкотораго вписаннаго тр—ка, а противолежащая ей вершина треугольника перемѣщается по бо́льшей дугѣ описанной окружности, то сторона треугольника, равная данной хордѣ, уголъ, противолежащій этой хордѣ, и сумма остальныхъ двухъ угловъ треугольника суть величины въ данномъ случаѣ постоянныя (теоремы 122 и 45), остальныя-же двѣ стороны и каждый изъ остальныхъ двухъ угловъ, а равно высота и площадь треугольника суть величины перемѣнныя. Другой примѣръ: если перемѣщающаяся въ плоскости круга сѣкущая подчинена тому условію, что она должна проходить чрезъ данную точку, лежащую внѣ круга, то длина сѣкущей и длина внѣшней ея части суть величины перемѣнныя, но произведеніе всей сѣкущей на ея внѣшнюю часть есть величина постоянная (слѣдствіе 4-ое теоремы 138).

Еще примѣръ: если въ данный кругъ вписанъ какой-нибудь правильный многоугольникъ, если число его сторонъ удваивается, и если притомъ удвоспію числа сторонъ вновь получаемыхъ многоугольниковъ не положено никакихъ препятствій, то радіусъ такого многоугольника съ удваивающимся числомъ сторонъ есть величина постоянная, апоѳема-же этого многоугольника, а равно его периметръ, площадь и сумма внутреннихъ угловъ суть величины перемѣнныя (теоремы 44, 117, 175 и 68); постоянной величиной является въ этомъ случаѣ также сумма внѣшнихъ угловъ многоугольника, такъ какъ сумма эта во всякомъ многоугольникѣ равняется $4d$.

Перемѣнныя величины можно различать трехъ родовъ: возрастающія, убывающія и разно-перемѣнныя. *Возрастающею* называется величина, которой значенія, при данныхъ условіяхъ, возрастаютъ, т. е. становятся все больше и больше, *убывающею*—такая величина, которой значенія при данныхъ условіяхъ убываютъ, т. е. становятся все меньше и меньше; *разно-перемѣнною* можно называть такую величина, которой значенія то возрастаютъ, то убываютъ. Такъ, напр., перемѣщающаяся сѣкущая данной окружности, подчиненная тому условію, что она должна проходить чрезъ неподвижную точку, лежащую внѣ этой окружности, есть величина возрастающая, пока сѣкущая приближается къ центру круга; удаляясь отъ центра, она становится величиною убывающею. Еще примѣръ: если одна сторона треугольника совпадаетъ съ какою-нибудь неподвижною хордою круга, а вершина его движется въ какомъ-нибудь одномъ направленіи по большей части окружности, то величина одного изъ прилежащихъ къ данной хордѣ угловъ есть величина возрастающая, а величина другого изъ нихъ величина убывающая; равнымъ образомъ величина одной изъ двухъ сторонъ этого треугольника есть величина возрастающая, а величина другой,—убывающая.

Изъ убывающихъ величинъ особеннаго вниманія заслуживаютъ величины, извѣстныя въ наукѣ подъ названіемъ безконечно-малыхъ величинъ. Если данная убывающая величина поставлена въ такія условія, что можетъ принять значеніе, которое меньше всякой, напередъ заданной, сколь угодно малой постоянной величины, то такая перемѣнная величина называется *безконечно-убывающею*, или (менѣе точно) *безконечно-малою величиною*.

Особенно замѣчательны тѣ безконечно-убывающія величины, которыя не могутъ обратиться въ нуль. Примѣръ: пусть данъ прямоугольный треугольникъ, пусть вершина одного изъ острыхъ угловъ его удаляется отъ противолежащаго ей катета; пусть, наконецъ, при

каждомъ положеніи этой движущейся вершины проведена гипотенуза, соединяющая эту вершину съ неподвижною вершиною другого остраго угла. Острый уголъ, вершина котораго удаляется, есть величина убывающая (слѣдствіе теоремы 46); кромѣ того, этотъ уголъ не можетъ обратиться въ нуль; наконецъ, замѣчательно, что онъ можетъ принимать такія значенія, которыя меньше всякаго напередъ заданнаго постояннаго угла; такимъ образомъ этотъ уголъ есть величина безконечно-малая. Еще примѣръ: пусть данъ правильный многоугольникъ, пусть число его сторонъ удвоено, потомъ удвоено число сторонъ вновь полученнаго многоугольника, затѣмъ снова удвоено число сторонъ этого послѣдняго и т. д., и пусть, наконецъ, ничто не препятствуетъ удвоенію числа сторонъ многоугольника; сторона многоугольника, поставленнаго въ такія условія, есть величина перемѣнная, притомъ убывающая; кромѣ того, эта сторона не можетъ сдѣлаться равною нулю; наконецъ, она обладаетъ еще тѣмъ свойствомъ, что можетъ быть сдѣлана менѣе всякой, напередъ заданной, сколь угодно малой длины (ибо при этихъ условіяхъ всегда можно построить такой многоугольникъ, сторона котораго была-бы менѣе напередъ заданной намъ прямой). Стало-быть, сторона правильнаго многоугольника съ удваивающимся числомъ сторонъ, если этому удвоенію не положено никакихъ препятствій, есть величина безконечно-малая.

Изъ возрастающихъ величинъ особеннаго вниманія заслуживаютъ величины, извѣстныя въ наукѣ подъ названіемъ безконечно-большихъ величинъ. Если данная возрастающая величина поставлена въ такія условія, что можетъ принять такое значеніе, которое болѣе всякой, напередъ заданной, сколь угодно большой постоянной величины, то такая возрастающая величина называется *безконечно-возрастающею*, или (менѣе точно) *безконечно-большою величиною*. Такъ, напр., разстояніе двухъ точекъ, все болѣе и болѣе удаляющихся другъ отъ друга, если увеличенію разстоянія между ними не положено никакихъ препятствій, есть величина безконечно-возрастающая.

Величины, не принадлежащія ни къ классу безконечно-малыхъ величинъ, ни къ классу безконечно-большихъ, называются *конечными*. Всякая постоянная величина есть величина конечная; кромѣ того, всѣ перемѣнныя величины, за исключеніемъ безконечно-малыхъ и безконечно-большихъ величинъ, суть тоже величины конечныя. Къ числу конечныхъ величинъ причисляется также и нуль.

Если разность между постоянною величиною и нѣкоторою перемѣнною равна безконечно-малой величинѣ, то эта постоянная величина называется *предѣломъ* данной перемѣнной величины. Такъ, напр., если въ прямоугольномъ тр—кѣ одна изъ вершинъ его уда-

ляется отъ противолежащаго ей катета, продолжая все время оставаться на продолженіи другого катета, и если этому удаленію не положено никакихъ препятствій, то удаляющаяся вершина вмѣстѣ съ остальными двумя неподвижными вершинами прямоугольнаго треугольника опредѣляетъ такой прямоугольный треугольникъ, въ которомъ острый уголъ, прилежащій къ неподвижному катету, увеличивается; но при этомъ разность между возрастающимъ (стало-быть, перемѣннымъ) острымъ угломъ этого треугольника и прямымъ его угломъ (т. е. постояннымъ угломъ) есть величина безконечно-малая. *Въ этомъ случаѣ прямой уголъ есть предѣлъ возрастающаго остраго угла прямоугольнаго треугольника.*

Замѣчаніе 1-ое. Термины „безконечно-малая величина“ и „безконечно-большая величина“ не вполнѣ точно характеризуютъ этого рода перемѣнныя величины: должно помнить, что какъ бы мала данная постоянная величина ни была, она все-таки не есть величина безконечно-малая, и какъ бы она велика ни была, она не есть величина безконечно-большая. Кромѣ того, должно помнить, что „безконечно-малыми“ и „безконечно-большими“ являются не тѣ *значенія*, которыя величина того или другого рода принимаетъ при своихъ измѣненіяхъ, а что этимъ именемъ лишь *называется* та или другая перемѣнная *величина*: о тѣхъ же значеніяхъ, которыя *принимаетъ* данная безконечно-малая (или безконечно-большая) величина при своихъ измѣненіяхъ, можно сказать, что эти значенія малы, очень малы, (велики, очень велики), но не безконечно-малы (не безконечно-велики).

Замѣчаніе 2-ое. Нуль, какъ извѣстно, принимается въ математикѣ за величину; понятно, что его приходится принимать за величину конечную, такъ какъ онъ сохраняетъ одно и то же значеніе и поэтому представляетъ собою постоянную величину. По этой причинѣ нѣкоторые опредѣляютъ безконечно-малую величину какъ перемѣнную, которая обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что разность между нею и нулемъ можетъ быть менѣе всякой, напередъ заданной, конечной величины.

Замѣчаніе 3-е. Въ ариѳметикѣ тоже встрѣчаемъ примѣры постоянныхъ и перемѣнныхъ величинъ (возрастающихъ, убывающихъ, безконечно-малыхъ и безконечно-большихъ), а также примѣры перемѣнныхъ величинъ, стремящихся къ извѣстнымъ предѣламъ. Такъ, напр., всякое данное цѣлое число, а равно всякая данная обыкновенная дробь есть величина постоянная; если подчинить цѣлое число тому условію, чтобы число его цифръ безпрепятственно увеличивалось, то это число есть величина перемѣнная, возрастающая, и притомъ безконечно-большая; если подчинить дробь тому

условію, чтобы знаменатель ея безпрепятственно увеличивался, то въ этомъ случаѣ мы будемъ имѣть дѣло съ величиною перемѣнною, убывающею, и притомъ безконечно-малою; если разсматривать періодическую десятичную дробь какъ перемѣнную величину, возрастающую съ присоединеніемъ къ взятымъ уже цифрамъ ея все новыхъ и новыхъ цифръ, то обыкновенная дробь, отъ обращенія которой въ десятичную произошла данная періодическая дробь, есть предѣлъ этой послѣдней.

Обозначенія. Условимся безконечно-малыя величины обозначать строчными буквами греческаго алфавита: α, β, γ и т. д., перемѣнныя величины послѣдними прописными буквами латинскаго алфавита Z, Y, X и т. д., предѣлы перемѣнныхъ величинъ—первыми прописными буквами латинскаго алфавита A, B, C и т. д.; если величина A есть предѣлъ величины X, величина B—предѣлъ величины Y и т. д., то условимся это обозначать такъ:

$$A = \text{пр. } X,\ B = \text{пр. } Y, \text{ или } \text{пр. } X = A,\ \text{пр. } Y = B.$$

Замѣчаніе. Если $A = \text{пр. } X$, то это значитъ, что разность между перемѣнною величиною X и постоянною величиною A есть величина безконечно-малая, т. е. что либо

$$X - A = \alpha, \text{ откуда } X = A + \alpha,$$

либо же

$$A - X = \alpha, \text{ откуда } X = A - \alpha,$$

гдѣ α обозначаетъ безконечно-малую величину. Въ первомъ случаѣ перемѣнная стремится къ своему предѣлу убывая, во второмъ возрастая. Хотя въ математикѣ встрѣчаются также и разно-перемѣнныя величины, которыя стремятся къ своимъ предѣламъ то убывая, то возрастая (напр., періодическая непрерывная дробь), но ниже мы будемъ имѣть дѣло исключительно съ такими перемѣнными величинами, которыя стремятся къ своему предѣлу либо возрастая, либо же убывая.

Нѣкоторыя теоремы о безконечно-малыхъ величинахъ.—Въ основѣ ученія о способѣ предѣловъ лежатъ слѣдующія теоремы о безконечно-малыхъ величинахъ *):

Лемма 17. Если положительная безконечно-малая величина болѣе какой-нибудь положительной величины, то эта послѣдняя равна либо безконечно-малой величинѣ, либо нулю.

Доказательство. Пусть положительная безконечно-малая величина

$$\alpha > k,$$

*) Сохраняемъ, для облегченія справокъ, общую нумерацію леммъ и теоремъ, несмотря на то, что содержаніе нѣкоторыхъ изъ нихъ не имѣетъ чисто-геометрическаго характера.

гдѣ k обозначаетъ какую-то неизвѣстную намъ положительную величину; требуется доказать, что k равно либо безконечно-малой величинѣ, либо же нулю.—Для доказательства этого предположимъ, что k не есть ни безконечно-малая, ни нуль; въ такомъ случаѣ k равно либо положительной безконечно-большой величинѣ (чего быть не можетъ), либо же какой-нибудь положительной конечной величинѣ (чего тоже быть не можетъ). А потому k равно либо нѣкоторой безконечно-малой величинѣ, либо же нулю. Что и требовалось доказать.

Теорема 180. Если безконечно-малую величину помножить на дробь правильную, то въ результатѣ получится безконечно-малая величина.

Доказательство. Пусть даны: безконечно-малая величина α и правильная дробь $\frac{p}{q}$; требуется доказать, что произведеніе

$$\alpha \times \frac{p}{q}$$

есть величина безконечно-малая.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что произведеніе

$$\alpha \times \frac{p}{q} < \alpha,$$

т. е. что это произведеніе менѣе безконечно-малой величины α. Стало-быть (лемма 17) произведеніе

$$\alpha \times \frac{p}{q}$$

есть величина либо равная нулю, либо безконечно-малая; но произведеніе двухъ величинъ можетъ равняться нулю только въ томъ случаѣ, если одинъ изъ множителей равенъ нулю, чего въ данномъ случаѣ быть не можетъ. Стало-быть, произведеніе это есть величина безконечно-малая. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Если безконечно-малую величину помножить на безконечно-малую дробь, то въ результатѣ получится безконечно-малая величина.—Дѣйствительно: если α есть безконечно-малая величина, а β — безконечно-малая дробь, то

$$\alpha \times \beta < \alpha \times \frac{p}{q},$$

гдѣ $\frac{p}{q}$ обозначаетъ нѣкоторую конечную правильную дробь; но

$$\alpha \times \frac{p}{q} < \alpha ,$$

стало-быть, и подавно (аксіома 7-ая) $\alpha \times \beta < \alpha$.

Теорема 181. Если безконечно-малую величину умножить на какое угодно постоянное цѣлое число, то въ результатѣ получится величина тоже безконечно-малая.

Доказательство. Пусть α обозначаетъ величину безконечно-малую, n обозначаетъ какое нибудь постоянное цѣлое число; требуется доказать, что произведеніе $\alpha . n$ есть величина тоже безконечно-малая, т. е. что значенія этого произведенія могутъ быть сдѣланы менѣе всякой напередъ заданной постоянной величины.— Для доказательства этого предположимъ, что буква m обозначаетъ нѣкоторую произвольно взятую постоянную, но сравнительно малую, величину; тогда существуетъ какое-нибудь значеніе α_m безконечно-малой величины α, которое имѣетъ то свойство, что

$$\alpha_m < \frac{m}{n} , \quad \text{откуда} \quad \alpha_m . n < m .$$

Это значитъ, что нѣкоторое значеніе произведенія $\alpha . n$ менѣе произвольно взятой нами постоянной, притомъ сравнительно малой, величины m. Стало-быть, произведеніе $\alpha . n$ можетъ принять значеніе, которое меньше нѣкоторой, произвольно взятой нами, постоянной величины m. Точно такъ же можно доказать, что произведеніе $\alpha . n$ можетъ принять значеніе, которое меньше какой нибудь другой конечной, сколь угодно малой, величины p, q или r, а также, что произведеніе это можетъ принять значеніе, меньшее *всякой*, произвольно выбранной или напередъ заданной, величины. Стало-быть, это произведеніе есть величина безконечно-малая. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1-ое. Если какую-нибудь безконечно-малую величину α помножить на постоянную неправильную дробь $\frac{p}{q}$, то полученное произведеніе есть величина тоже безконечно-малая.— Дѣйствительно: если $\frac{p}{q}$ есть постоянная неправильная дробь, то существуетъ такое постоянное цѣлое число n, которое больше этой дроби, и тогда

$$\alpha . \frac{p}{q} < \alpha . n ;$$ а въ такомъ случаѣ произведеніе $\alpha . \frac{p}{q}$

меньше другой безконечно-малой величины, т. е. представляетъ собою (лемма 17) величину безконечно-малую.

Слѣдствіе 2-ое. Если какую-нибудь безконечно-малую величину α помножить на какое либо конечное перемѣнное число, то полученное произведеніе есть величина тоже безконечно-малая. — Дѣйствительно: если перемѣнное число x есть число конечное, то

$$\alpha \,.\, x < \alpha \,.\, n \,,$$

гдѣ n обозначаетъ цѣлое число, большее, чѣмъ конечное число x. Но $\alpha \,.\, n$ есть величина безконечно-малая. Стало-быть (лемма 17), произведеніе $\alpha \,.\, x$ есть величина безконечно-малая.

Замѣчаніе. Безконечно-малыя величины могутъ быть равны, могутъ быть и не равны между собою: это вполнѣ зависитъ отъ ихъ происхожденія. Такъ, напр., двѣ величины

$$\frac{1}{2^m} \text{ и } \frac{1}{4^n} \,,$$

при безпрепятственномъ увеличеніи цѣлыхъ показателей m и n, вообще различны; значенія первой величины суть:

$$\frac{1}{2} \,,\ \frac{1}{4} \,,\ \frac{1}{8} \,,\ \frac{1}{16} \,,\ \frac{1}{32} \,,\ \frac{1}{64} \,,\ \frac{1}{128} \,,\ \frac{1}{256} \,,\ \ldots ;$$

значенія же второй суть:

$$\frac{1}{4} \,,\ \frac{1}{16} \,,\ \frac{1}{64} \,,\ \frac{1}{256} \,,\ \frac{1}{1224} \,,\ \ldots . ;$$

очевидно, что, при одинаковыхъ значеніяхъ показателей m и n,

$$\frac{1}{2^m} > \frac{1}{4^n}$$

и что для равенства этихъ величинъ показатели m и n должны быть подчинены нѣкоторому условію. За-то слѣдующія двѣ дроби:

$$\frac{1}{10^m} \text{ и } \frac{3^m}{30^m}$$

равны между собою, потому что всегда

$$\frac{3^m}{30^m} = \frac{3^m}{3^m \,.\, 10^m} = \frac{1}{10^m} \,,$$

каковы бы ни были значенія, принимаемыя показателями m. А потому, если показателя m подчинить тому условію, что онъ долженъ принимать безпрепятственно возрастающія значенія чиселъ натуральнаго ряда чиселъ: 1, 2, 3, 4, 5, ... , то въ такомъ случаѣ послѣднія двѣ дроби будутъ величины безконечно-малыя, притомъ равныя между собою.

Теорема 182. Если дано какое нибудь конечное число безконечно-малыхъ величинъ, то сумма ихъ есть величина тоже безконечно-малая.

Доказательство. Пусть дано n безконечно-малыхъ величинъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu, \nu$; требуется доказать, что сумма этихъ величинъ, т. е.

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \mu + \nu$$

есть величина безконечно-малая.—Для доказательства этого представимъ себѣ безконечно-малую величину ρ, которая больше каждой изъ данныхъ безконечно-малыхъ величинъ; тогда

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \mu + \nu < \rho \,.\, n.$$

Но произведеніе $\rho \,.\, n$ есть величина безконечно-малая (теорема 181), а потому (лемма 17) и сумма

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \mu + \nu$$

есть величина тоже безконечно-малая. Что и требовалось доказать.

Теорема 183. Если двѣ величины безконечно-малы, то разность ихъ есть величина либо безконечно-малая, либо же равная нулю.

Доказательство. Пусть α и β представляютъ собою двѣ безконечно-малыя величины; требуется доказать, что разность

$$\alpha - \beta$$

есть величина либо безконечно-малая, либо же равная нулю.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что разность

$$\alpha - \beta < \alpha.$$

Это значитъ, что разность $\alpha - \beta$ должна быть менѣе безконечно-малой величины α; но менѣе безконечно-малой величины можетъ быть либо другая безконечно-малая величина, либо же нуль (лемма 17). Стало-быть, разность $\alpha - \beta$, если α и β суть величины безконечно-малыя, есть величина либо безконечно-малая, либо равная нулю. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Начинающему можетъ придти въ голову мысль, будто отношеніе (частное) двухъ безконечно-малыхъ величинъ тоже всегда величина безконечно-малая; но эта мысль ошибочна.—Дѣйствительно: произведеніе безконечно-малой величины α на конечное число n равно тоже безконечно малой величинѣ, напр., безконечно-малой величинѣ β, т. е. $\alpha \,.\, n = \beta$; поэтому частное

$$\frac{\beta}{\alpha} = n \,;$$

отсюда мы видимъ, что отношеніе двухъ безконечно-малыхъ величинъ можетъ быть равно цѣлому или другому конечному числу n. Можетъ, конечно, случиться, чтобы частное двухъ безконечно-малыхъ величинъ было величиною безконечно-малою, но это вовсе не обязательно для всякихъ двухъ безконечно-малыхъ величинъ.

Основныя теоремы теоріи предѣловъ.—Теорія предѣловъ обыкновенно излагается въ учебникахъ начальной геометріи

не во всемъ своемъ объемѣ, такъ какъ для цѣлей Геометріи вполнѣ достаточно слѣдующихъ трехъ теоремъ:

Лемма 18. Разность между двумя постоянными величинами можетъ быть равна либо нулю, либо другой постоянной величинѣ.

Доказательство. Пусть даны двѣ постоянныя величины M и N; требуется доказать, что разность M — N не можетъ быть ни величиною безконечно-малою, ни величиною безконечно-большою, ни какою либо иною перемѣнною величиною.—Для доказательства этого предположимъ, что

$$M - N = x,$$

гдѣ буква x обозначаетъ величину перемѣнную (конечную, безконечно-малую или безконечно-большую); во всякомъ случаѣ тогда

$$M = N + x,$$

гдѣ M есть величина постоянная; но сумма $N + x$ должна быть величиною перемѣнною, потому что одно изъ слагаемыхъ этой суммы есть величина постоянная, а другое—величина перемѣнная. Такимъ образомъ постоянная величина равняется перемѣнной, чего быть не можетъ (аксіома 1-я). Слѣдовательно разность между двумя постоянными величинами не можетъ быть равна ни конечной перемѣнной величинѣ, ни безконечно-малой, ни безконечно-большой величинѣ. Стало-быть, разность между двумя постоянными величинами M и N можетъ быть равна либо нулю, либо какой нибудь другой постоянной величинѣ. Что и требовалось доказать.

Теорема 184. Если изъ двухъ (возрастающихъ или убывающихъ) величинъ каждая имѣетъ нѣкоторый предѣлъ и если эти двѣ величины остаются при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ равны между собою, то ихъ предѣлы между собою тоже равны.

Доказательство. Пусть величины X и Y суть величины перемѣнныя, пусть A = пр. X, а B = пр. Y, и пусть, наконецъ, X = Y при всѣхъ измѣненіяхъ этихъ величинъ; требуется доказать, что A = B.—Для доказательства этого допустимъ, что объ величины стремятся къ своимъ предѣламъ убывая, и примемъ во вниманіе, что если

$$A = \text{пр. } X, \text{ а } B = \text{пр. } Y,$$

то въ такомъ случаѣ

$$X = A + \alpha, \text{ а } Y = B + \beta$$

Но X и Y равны между собою при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ, стало-быть, всегда (аксіома 5)

$$A + \alpha = B + \beta, \text{ откуда } A - B = \beta - \alpha$$

Вторая часть этого равенства должна быть равна либо величинѣ

безконечно-малой, либо же нулю (теорема 183). Но первая часть того же равенства, т. е. разность

$$A - B ,$$

не можетъ быть равна величинѣ безконечно-малой (лемма 18); слѣдовательно обѣ разности равняются нулю, т. е.

$$\beta - \alpha = 0 ,$$

а также

$$A - B = 0 , \text{ откуда } A = B .$$

Точно такъ же ведется доказательство и въ случаѣ, если величины X и Y обѣ суть величины, стремящіяся къ своимъ предѣламъ возрастая. Стало-быть, если двѣ возрастающія или убывающія величины имѣютъ предѣлы и если онѣ равны другъ другу при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ, то и предѣлы ихъ между собою равны. Что̀ и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Выше не разсмотрѣнъ случай, когда обѣ перемѣнныя величины принадлежатъ къ числу разно-перемѣнныхъ.

Теорема 185. Если изъ двухъ (возрастающихъ или убывающихъ) величинъ каждая имѣетъ нѣкоторый предѣлъ и если отношеніе одной изъ этихъ величинъ къ другой при всѣхъ ихъ измѣненіяхъ, равно одному и тому же постоянному числу, то отношеніе предѣла первой величины къ предѣлу второй равно тому же постоянному числу.

Доказательство. Пусть даны двѣ перемѣнныя величины X и Y, пусть пр. $X = A$, пр. $Y = B$, пусть, наконецъ, при всѣхъ измѣненіяхъ величинъ X и Y, отношеніе

$$\frac{X}{Y} = m ,$$

гдѣ m есть число постоянное; требуется доказать, что

$$\frac{A}{B} = m .$$

Для доказательства этого допустимъ, что обѣ величины X и Y стремятся *къ своимъ предѣламъ убывая*, и *примемъ во вниманіе*, что если

пр. $X = A$, а пр. $Y = B$, то $X = A + \alpha$, а $Y = B + \beta$.

Но такъ какъ по условію

$$\frac{X}{Y} = m ,$$

то (аксіома 5)

$$\frac{A + \alpha}{B + \beta} = m , \text{ откуда } A + \alpha = Bm + \beta m .$$

Каждая изъ обѣихъ частей послѣдняго равенства представляетъ величину перемѣнную, и притомъ первая часть представляетъ собою перемѣнную величину, отличающуюся отъ постоянной A на безконечно-малую величину α, а вторая — перемѣнную величину, отличающуюся отъ постоянной величины Bm на безконечно-малую величину βm (теорема 181); а потому величина A есть предѣлъ перемѣнной величины $A + \alpha$, а величина Bm есть предѣлъ перемѣнной величины $Bm + \beta m$. Слѣдовательно (теорема 184)

$$A = B \,.\, m \text{, откуда } \frac{A}{B} = m \,.$$

Точно такъ же доказывается справедливость этого равенства въ случаѣ, если величины X и Y стремятся къ своимъ предѣламъ убывая. Стало-быть, если

$$A = \text{пр. } X, \text{ а } B = \text{пр. } Y$$

и если

$\frac{X}{Y} = m$, то и $\frac{A}{B} = m$. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе 1-ое. Случай, когда величины X и Y стремятся къ своимъ предѣламъ то убывая, то возрастая—выше не разсмотрѣнъ.

Замѣчаніе 2-ое. Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ пользоваться преимущественно теоремами 181, 184 и 185. но на основаніи тѣхъ же теоремъ легко могутъ быть доказаны слѣдующія, примѣненіе которыхъ ведетъ къ большимъ сокращеніямъ въ выкладкахъ: *предѣлъ суммы конечнаго числа перемѣнныхъ величинъ* равенъ суммѣ предѣловъ ея слагаемыхъ; предѣлъ произведенія постоянной величины на перемѣнную равенъ этой постоянной, умноженной на предѣлъ данной перемѣнной; предѣлъ произведенія конечнаго числа перемѣнныхъ величинъ равенъ произведенію предѣловъ тѣхъ же перемѣнныхъ; наконецъ, предѣлъ отношенія двухъ перемѣнныхъ равенъ отношенію предѣловъ тѣхъ же перемѣнныхъ.—Доказательство этихъ теоремъ предоставляется, въ качествѣ весьма полезнаго упражненія, учащемуся.

Допущеніе относительно всякой кривой линіи.— Относительно всякой кривой линіи дѣлается слѣдующее допущеніе: длина отрѣзка всякой кривой линіи можетъ быть выражена въ единицахъ мѣры длины.

Замѣчаніе. Что называется длиною отрѣзка кривой линіи— знаетъ всякій, и понятіе о длинѣ отрѣзка кривой принадлежитъ къ числу первоначальныхъ, основныхъ, не подлежащихъ опредѣленію. —Длина отрѣзка кривой есть величина; а потому, если отрѣзокъ [illegible] полученной отрѣзокъ — снова попо-

ламъ и т. д., и если этому дѣленію не положено никакихъ препятствій, то длина этого частнаго есть величина безконечно-малая.

Теорема 186. Если число сторонъ правильнаго вписаннаго многоугольника удваивается, число сторонъ полученнаго многоугольника вновь удваивается и т. д., и если этому удвоенію не положено никакихъ препятствій, то сторона такого многоугольника съ безконечно-возрастающимъ числомъ сторонъ есть величина безконечно-малая.

Доказательство. Пусть данъ какой либо правильный вписанный многоугольникъ, пусть число его сторонъ удваивается, число сторонъ полученнаго многоугольника вновь удваивается и т. д., и пусть этому удвоенію не положено никакихъ препятствій; требуется доказать, что сторона этого многоугольника съ безконечно-возрастающимъ числомъ сторонъ есть величина безконечно-малая. —Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что съ удвоеніемъ числа сторонъ дуга, стягиваемая стороною многоугольника, уменьшается, и этому уменьшенію не положено никакихъ препятствій. Слѣдовательно эта дуга есть величина безконечно-малая. Но сторона, стягивающая эту дугу, меньше дуги (допущеніе 6-ое относительно прямой линіи). Стало-быть (лемма 17), сторона правильнаго многоугольника съ безконечно-удваивающимся числомъ сторонъ есть величина безконечно-малая. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Радіусъ правильнаго вписаннаго многоугольника съ безконечно-удваивающимся числомъ сторонъ есть предѣлъ апоѳемы того-же многоугольника.—Дѣйствительно: если радіусъ многоугольника съ безконечно удваивающимся числомъ сторонъ обозначенъ буквою R, а апоѳема его—буквою X, то

$$R - X < \frac{x}{2},$$

гдѣ x обозначаетъ сторону правильнаго вписаннаго многоугольника съ безконечно-удваивающимся числомъ сторонъ (слѣдствіе теоремы 44). Но величина $\frac{x}{2}$ есть величина безконечно-малая (теорема 186 и теорема 180). Стало-быть,

$$R - X = \alpha,$$

гдѣ α обозначаетъ величину безконечно-малую, а въ такомъ случаѣ

$$R = \text{пр. } X.$$

Теорема 187. Если число сторонъ правильнаго описаннаго многоугольника удваивается, число сторонъ полученнаго многоугольника вновь удваивается и т. д., и если этому удвоенію не поло-

жено никакихъ препятствій, то сторона такого многоугольника съ съ безконечно-возрастающимъ числомъ сторонъ есть величина безконечно-малая.

Доказательство. Пусть данъ какой либо правильный описанный многоугольникъ и пусть число сторонъ его безконечно удваивается; требуется доказать, что сторона этого многоугольника есть величина безконечно-малая.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что (слѣдствіе теоремы 163)

$$b_n = \frac{a_n \cdot D}{\sqrt{D^2 - a_n^2}} = a_n \cdot \frac{D}{\sqrt{D^2 - a_n^2}}.$$

Съ увеличеніемъ n до безконечности, величина a_n дѣлается величина безконечно-малой, а дробь, на которую умножена эта величина, остается величиной конечной. Поэтому также и b_n есть величина безконечно малая (слѣдствіе 2-ое теоремы 181). Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Апоѳема описаннаго правильнаго многоугольника съ безконечно-удваивающимся числомъ сторонъ есть предѣлъ его радіуса.—Дѣйствительно: если апоѳема описаннаго многоугольника съ безконечно-убывающимъ числомъ сторонъ обозначена буквою A, его радіусъ буквою X, то.

$$X - A < \frac{x}{2},$$

гдѣ x обозначаетъ сторону правильнаго описаннаго многоугольника съ безконечно-удваивающимся числомъ сторонъ. Но $\frac{x}{2}$ есть величина безконечно-малая (теорема 187 и теорема 180). Стало-быть, $X - A = \alpha$, гдѣ α обозначаетъ величину безконечно-малую, а въ такомъ случаѣ $A = \text{пр. } X$.

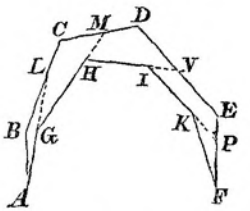
Опредѣленія. Если нѣкоторая ломаная и нѣкоторая кривая имѣютъ общіе концы, если обѣ лежатъ *по одну и ту же сторону* прямой соединяющей эти концы, и если одна изъ линій лежитъ вся между другою изъ нихъ и этою прямою, то *вторая изъ нихъ* называется *обземлющею*, а первая—*обземлемою линіею*. Такъ, составленная изъ хордъ данной выпуклой кривой ломаная называется по отношенію къ этой кривой *обземлемою*, кривая-же по отношенію къ ломаной называется *обземлющею*; выпуклая ломаная, составленная изъ касательныхъ къ данной выпуклой по отношенію къ кривой называется *обземлющею*, а кривая по отношенію къ ломаной—

Допущеніе относительно объемлемой кривой линіи.—Относительно объемлемыхъ кривыхъ дѣлается слѣдующее допущеніе: всякая выпуклая объемлемая кривая менѣе ломаной или кривой, ее объемлющей.

Замѣчаніе 1-ое. Это допущеніе извѣстно въ наукѣ подъ названіемъ *второго Архимедова постулата*, по имени славнѣйшаго геометра древности Архимеда, жившаго въ III в. до Р. Хр. Допущеніе же 6-ое о прямой линіи представляетъ собою *первый Архимедовъ постулатъ*.

Замѣчаніе 2-ое. Что выпуклая объемлемая ломаная менѣе объемлющей ломаной доказывается слѣдующимъ образомъ: пусть (черт. 207) элементы объемлемой ломаной AGHIKF продолжены до пересѣченія съ объемлющей ломаной ABCDF; тогда (теорема 44):

лом. ABCDEF > лом. ALCDEF,
лом. ALCDEF > лом. AGMDEF,
лом. AGMDEF > лом. AGHNEF,
лом. AGHNEF > лом. AGHIPF,
лом. AGHIPF > лом. AGHIKF.



Черт. 207.

А въ такомъ случаѣ и подавно (аксіома 7)

лом. ABCDEF > лом. AGHIKF,

что̀ и требовалось доказать.—То же доказательство примѣнимо въ случаѣ, если объемлющая линія ABCDEF есть линія кривая, но непримѣнимо, если кривая есть линія объемлемая.

Теорема 188. *Если радіусы двухъ окружностей равны между собою, то длина одной изъ нихъ равна длинѣ другой.*

Доказательство. Пусть (чертежа въ этомъ случаѣ не требуется) радіусы двухъ окружностей равны между собою; требуется доказать, что длина одной изъ нихъ равна длинѣ другой.—Для доказательства этого примемъ какую либо точку A первой изъ нихъ за начало и конецъ этой окружности, а точку B второй окружности за начало и конецъ второй. Наложимъ вторую окружность на первую такъ, чтобы онѣ совпали, что̀ возможно (теорема 101-ая). Если при этомъ точка B совпала съ точкою A, то длина одной окружности равна длинѣ другой; если же онѣ не совпали, то, повернувъ одну изъ нихъ вокругъ центра до тѣхъ поръ, пока точка B совпадетъ съ точкою A, получимъ, что длина первой окружности равна длинѣ второй. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Длина окружности, описанной даннымъ радіусомъ изъ какого угодно центра, есть величина постоянная.—Дѣйствительно: длина окружности не зависитъ отъ положенія точки, прини-

маемой нами за начало и конецъ окружности (теорема 188); поэтому длина окружности, описанной даннымъ радіусомъ, не можетъ принимать различныхъ значеній.

Замѣчаніе. Предполагая, что понятіе длины кривой въ нашемъ умѣ выработано и уже существуетъ, мы принимаемъ также, что длина всякой окружности можетъ быть выражена въ линейныхъ мѣрахъ. И дѣйствительно: мы легко можемъ себѣ представить, что длина какой нибудь окружности равняется 15-ти футамъ, 3-мъ вершкамъ или $26\frac{1}{2}$ верстамъ. Такія окружности мы можемъ себѣ представить, хотя-бы мы и не были въ состояніи начертить окружность, имѣющую ту или другую длину, т. е. хотя-бы и не были въ состояніи найти радіусъ такой окружности, которая имѣла бы данную длину. Ниже выяснено—какова именно зависимость между длиною всякой окружности и длиною ея радіуса.

Теорема 189. Если одинъ правильный многоугольникъ вписанъ въ данный кругъ, а другой, того же числа сторонъ, описанъ около него, если число сторонъ каждаго неограниченно удваивается, то разность между периметрами соотвѣтствующихъ многоугольниковъ съ безконечно-увеличивающимся числомъ сторонъ, а также разность между ихъ площадями суть величины безконечно-малыя.

Доказательство. Пусть периметръ правильнаго описаннаго многоугольника съ безконечно-увеличивающимся числомъ сторонъ обозначенъ буквою P, а периметръ одноименнаго вписаннаго многоугольника—буквою p, площадь перваго—буквою Q, площадь второго—буквою q, радіусъ перваго—буквою R, а радіусъ второго—буквою r; требуется доказать, что

$$P - p = \alpha, \text{ а пл. } Q - \text{пл. } q = \beta,$$

гдѣ α и β обозначаютъ нѣкоторыя безконечно-малыя величины.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что

$\frac{P}{p} = \frac{R}{r}$ (теорема 162) и $\frac{\text{пл. } Q}{\text{пл. } q} = \frac{R^2}{r^2}$ (слѣдствіе теоремы 177).

Изъ первой пропорціи имѣемъ:

$$\frac{P - p}{p} = \frac{R - r}{r}, \text{ откуда } P - p = (R - r) \cdot \frac{p}{r}, \ldots . \text{ (I)}$$

а изъ второй пропорціи имѣемъ:

$$\text{пл. } \frac{Q - \text{пл. } q}{q} = \frac{R^2 - r^2}{r^2},$$

откуда

$$\text{пл. } Q - \text{пл. } q = (R^2 - r^2) \cdot \frac{q}{r} = (R - r) \cdot \frac{(R + r) \cdot q}{r^2} \ldots \text{ (II)}$$

Въ равенствахъ (I) и (II) разность $R - r$ есть безконечно-малая величина (слѣдствіе теоремы 187), а соотвѣтственные множители

$$\frac{p}{r} \text{ и } \frac{(R + r) \cdot q}{r^2}$$

суть множители конечные, а потому (слѣдствіе 2-ое теоремы 181)

$$P - p = \alpha, \text{ а пл. } Q - \text{пл. } q = \beta,$$

гдѣ α и β обозначаютъ величины безконечно-малыя. Что и требовалось доказать.

Теорема 190. Длина окружности есть предѣлъ периметра правильнаго, вписаннаго въ нее, многоугольника съ безконечно-удваивающимся числомъ сторонъ, а также предѣлъ периметра правильнаго, описаннаго около нея, многоугольника съ безконечно-удваивающимся числомъ сторонъ.

Доказательство. Пусть длина окружности обозначена буквою C, периметръ правильнаго описаннаго около нея многоугольника съ безконечно-удваивающимся числомъ сторонъ—буквою P, и периметръ правильнаго вписаннаго въ нее многоугольника съ безконечно-удваивающимся числомъ сторонъ—буквою p; требуется доказать, что $C = \text{пр. } p = \text{пр. } P$.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что $C < P$ (допущеніе относительно выпуклой объемлемой кривой)

и что

$$p = p \text{ (аксіома 1-ая)},$$

откуда (аксіома 9-ая)

$$C - p < P - p.$$

Но разность $P - p$ есть величина безконечно-малая (теорема 189); стало-быть, и разность $C - p$ есть величина безконечно-малая (лемма 17-ая). А потому

$$C = \text{пр. } p.$$

Съ другой стороны:

$$P = P \text{ (аксіома 1-ая)},$$

а

$$C > p \text{ (допущеніе 6-ое о прямой)};$$

откуда (аксіома 10-ая)

$$P - C < P - p.$$

Но разность $P - p$ есть величина безконечно-малая (теорема 189); стало-быть, разность $P - C$ тоже безконечно-малая величина (лемма 17-ая). А потому:

$$C = \text{пр. } P.$$

Стало-быть,

$$C = \text{пр. } p = \text{пр. } P.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 191. Площадь круга есть предѣлъ площади правильнаго, вписаннаго въ него, многоугольника съ безконечно-удваивающимся числомъ сторонъ, а также и предѣлъ площади правильнаго, описаннаго около него, многоугольника съ удваивающимся числомъ сторонъ.

Доказательство. Пусть площадь описаннаго многоугольника обозначена буквою Q, площадь вписаннаго—буквою q, а площадь круга—буквою O; требуется доказать, что

$$\text{пл. O} = \text{пр. } q = \text{пр. Q}.$$

Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что (аксіома 1-ая)

$$\text{пл. O} < \text{пл. Q},$$
$$\text{пл. } q = \text{пл. } q;$$

отсюда (аксіома 9)

$$\text{пл. O} - \text{пл. } q < \text{пл. Q} - \text{пл. } q;$$

но разность площадей Q и q есть величина безконечно-малая (теорема 189); слѣдовательно и разность пл. O — пл. q тоже величина безконечно-малая (лемма 17-ая); откуда

$$\text{пл. O} = \text{пр. пл. } q.$$

Съ другой стороны:

$$\text{пл. Q} = \text{пл. Q (аксіома 1-ая)},$$
$$\text{пл. O} > \text{пл. } q \text{ (аксіома 1-ая)};$$

отсюда

$$\text{пл. Q} - \text{пл. O} < \text{пл. Q} - \text{пл. } q \text{ (аксіома 10-ая)};$$

но разность площадей Q и q есть величина безконечно-малая; слѣдовательно и разность пл. Q — пл. O тоже величина безконечно-малая (лемма 17); откуда

$$\text{пл. O} = \text{пр. пл. Q}.$$

Стало-быть,

$$\text{пл. O} = \text{пр. пл. } q = \text{пр. пл. Q}.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 192. Если даны два круга, то длина окружности перваго изъ нихъ относится къ длинѣ окружности второго, какъ радіусъ первой относится къ радіусу второй, а площадь перваго круга относится къ площади второго, какъ квадратъ радіуса перваго относится къ квадрату радіуса второго.

Доказательство. Пусть длина первой окружности обозначена буквою C_1, длина второй—буквою C_2, площадь перваго—буквою O_1, площадь второго—буквою O_2, радіусъ перваго буквою R_1, радіусъ второго—буквою R_2; требуется доказать, что

$$C_1 : C_2 = R_1 : R_2, \text{ а пл. } O_1 : \text{пл. } O_2 = R_1^2 : R_2^2.$$

—Для доказательства этого обозначимъ периметръ правильнаго вписаннаго въ первый изъ круговъ многоугольника съ безконечно-

удваивающимся числомъ сторонъ буквою P_1, периметръ правильнаго одноименнаго многоугольника съ безконечно-удваивающимся числомъ сторонъ, вписаннаго во второй изъ нихъ, буквою P_2, площадь перваго—буквою Q_1, площадь второго—буквою Q_2, и примемъ во вниманіе, что

$$P_1 : P_2 = R_1 : R_2 \text{ (теорема 162),}$$

а

$$\text{пл. } Q_1 : \text{пл. } Q_2 = R_1^2 : R_2^2 \text{ (слѣдствіе теоремы 177);}$$

но P_1 есть перемѣнная величина, которой предѣлъ равенъ C_1, а P_2 — перемѣнная, которой предѣлъ равенъ C_2 (теорема 190); пл. Q_1—перемѣнная величина, которой предѣлъ равенъ пл. O_1, а пл. Q_2—перемѣнная, которой предѣлъ равенъ пл. O_2 (теорема 191). Стало-быть (теорема 185):

$$C_1 : C_2 = R_1 : R_2, \text{ а пл. } O_1 : \text{пл. } O_2 = R_1^2 : R_2^2.$$

Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1-ое. Отношеніе длины окружности къ длинѣ ея радіуса равно нѣкоторому, постоянному для всѣхъ окружностей, числу; точно также отношеніе площади круга къ квадрату радіуса равно нѣкоторому постоянному для всѣхъ круговъ числу.—Дѣйствительно: такъ какъ $C_1 : C_2 = R_1 : R_2$, а пл. $O_1 : \text{пл. } O_2 = R_1^2 : R_2^2$, то, перемѣстивъ въ этихъ пропорціяхъ ихъ средніе члены, получимъ:

$$\frac{C_1}{R_1} = \frac{C_2}{R_2}, \text{ а } \frac{\text{пл. } O_1}{R_1^2} = \frac{\text{пл. } O_2}{R_2^2}.$$

Но окружности взяты въ этомъ случаѣ произвольныя; стало-быть, отношеніе длины всякой окружности къ ея радіусу равно отношенію длины всякой другой окружности къ ея радіусу, т. е. равно нѣкоторому постоянному для всѣхъ окружностей числу; точно такъ же убѣдимся, что и отношеніе площади круга къ квадрату его радіуса есть число тоже для всѣхъ круговъ постоянное.

Слѣдствіе 2-ое. Отношеніе длины окружности къ длинѣ ея діаметра есть число для всѣхъ окружностей постоянное. — Убѣдиться въ этомъ предоставляется учащемуся.

Опредѣленіе. Отношеніе длины окружности къ длинѣ ея діаметра, или, что то же, отношеніе длины полуокружности къ длинѣ ея радіуса, условимся называть *спрямленіемъ окружности*. Это число обыкновенно обозначаютъ буквою π греческаго алфавита.

Теорема 193. Спрямленіе окружности есть отвлеченное число, которое больше трехъ, но меньше четырехъ.

Доказательство. Пусть дана какая либо окружность; требуется доказать, что

$$3 < \pi < 4.$$

—Для доказательства этого обозначимъ длину радіуса этой окружности буквою R, длину окружности буквою C; впишемъ въ этотъ кругъ правильный шестиугольникъ и опишемъ вокругъ него квадратъ. Сторона правильнаго шестиугольника, вписаннаго въ окружность, равна ея радіусу (теорема 165); поэтому периметръ этого шестиугольника равенъ 6 R; сторона квадрата, описаннаго около даннаго круга, равна его діаметру (замѣчаніе 3-е, которымъ снабжена теорема 168), а периметръ его равенъ учетверенному діаметру или 8 R. Длина окружности должна быть меньше периметра описаннаго квадрата (допущеніе относительно выпуклой объемлемой кривой) и больше периметра вписаннаго шестиугольника (допущеніе 6-ое относительно прямой); стало-быть,

$$C > 6R \text{ и } C < 8R,$$

откуда

$$\frac{C}{2R} > 3 \text{ и } \frac{C}{2R} < 4; \text{ т. е. } \pi > 3 \text{ и } \pi < 4,$$

или

$$3 < \pi < 4.$$

Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Высшая математика предлагаетъ многочисленныя средства для довольно быстраго вычисленія спрямленія окружности съ какою угодно степенью точности и доказываетъ, что не только самое спрямленіе есть число несоизмѣримое съ единицею, но что и квадратъ его тоже число несоизмѣримое съ единицею и что не существуетъ такого алгебраическаго уравненія съ раціональными коэффиціентами, котораго корень равнялся бы числу π.

Элементарный способъ вычисленія спрямленія окружности съ какою угодно степенью точности.— Отношеніе длины окружности къ длинѣ діаметра (слѣдствіе 2-ое теоремы 192) во всѣхъ окружностяхъ одно и то же; поэтому взявъ окружность, радіусъ которой равенъ единицѣ, и вычисливъ длину полупериметровъ правильныхъ вписанныхъ шестиугольника, двѣнадцатиугольника, двадцатичетыреугольника и т. д., можно получить цѣлый рядъ чиселъ, меньшихъ спрямленія окружности, но все болѣе и болѣе приближающихся къ нему. Для того чтобы узнать—какія изъ цифръ этихъ чиселъ принадлежатъ спрямленію окружности и какія ему уже не принадлежатъ, вычисляютъ также длину полупериметровъ правильныхъ описанныхъ шестиугольника, двѣнадцатиугольника, двадцатичетыреугольника и т. д. При этомъ получаются числа бо́льшія, чѣмъ спрямленіе окружности. Сопоставивъ числа, выражающія длины полупериметровъ двухъ одноименныхъ правильныхъ

многоугольниковъ, изъ которыхъ одинъ вписанъ въ данную окружность, а другой описанъ вокругъ нея, увидимъ, что у этихъ двухъ чиселъ есть нѣкоторый рядъ общихъ цифръ; при этомъ *всѣ общія въ данномъ случаѣ цифры, начиная съ первой и считая отъ лѣвой руки къ правой, принадлежатъ также и спрямленію окружности.* Вычисленія эти, не представляя собою никакой логической трудности, представляютъ однако затрудненія практическія, такъ какъ требуютъ многократнаго приближеннаго извлеченія квадратныхъ корней изъ чиселъ, несоизмѣримыхъ съ единицею. Выше въ замѣчаніи 1-мъ, которымъ снабжена теорема 168-ая, дана таблица приблизительныхъ величинъ полупериметровъ правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ при радіусѣ круга, равномъ единицѣ. Здѣсь часть этой таблицы повторена, но общія цифры, принадлежащія также и спрямленію окружности, напечатаны болѣе чернымъ шрифтомъ:

Число сторонъ прав. многоуг.	Полупериметры прав. впис. многоуг.	Полупериметры прав. опис. многоуг.
6	**3**,00000	**3**,46411
12	**3**,10582	**3**,21540
24	**3,1**3262	**3,1**5967
48	**3,1**3935	**3,1**4609
96	**3,14**103	**3,14**272
192	**3,141**45	**3,141**88

Наизусть необходимо помнить слѣдующія приблизительныя величины спрямленія окружности:

съ лишкомъ $3\frac{1}{7}$ или $\frac{22}{7}$ (съ точностью до 0,01),

безъ малаго 3,14 (съ точностью до 0,01),

съ лишкомъ $\frac{355}{113}$ (съ точностью до 0,000001).

Первая изъ этихъ величинъ дана славнѣйшимъ геометромъ древности Архимедомъ (III в. до Р. Хр.), третья же — Петромъ Ме-

ціемъ (XVI в. по Р. Хр.). Иногда при вычисленіяхъ полезно знать, что приблизительно

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}31831, \text{ а } \sqrt{\pi} = 1{,}77245 .$$

Замѣчаніе. Очень многихъ занимала и до сихъ поръ продолжаетъ занимать задача, состоящая въ отысканіи точной величины стороны того квадрата, площадь котораго равна площади круга. На рѣшеніе этой задачи потрачено очень много времени и силъ, но безуспѣшно, такъ какъ эта задача принадлежитъ къ числу неразрѣшимыхъ. Она извѣстна подъ именемъ *задачи квадратуры круга*. Къ числу подобныхъ же неразрѣшимыхъ задачъ, которыми не слѣдуетъ заниматься, принадлежатъ также задача о раздѣленіи всякаго угла на три равныя части (*о трисекціи угла*) и задача о нахожденіи вѣчнаго движенія или такъ называемаго perpetuum mobile.—Существуютъ, впрочемъ, нѣсколько способовъ *приближеннаго* рѣшенія задачи квадратуры круга.

Теорема 194. Если дана длина радіуса окружности, то длина окружности равняется удвоенному произведенію спрямленія окружности на длину радіуса.

Доказательство. Пусть длина радіуса данной окружности равна R единицамъ длины, а длина окружности равна C единицамъ длины; требуется доказать, что

$$C = 2\pi R.$$

Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что
$C : 2R = \pi$, откуда $C = 2\pi R$. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Если извѣстна длина окружности, то длина радіуса равняется длинѣ окружности, раздѣленной на удвоенное спрямленіе окружности.—Дѣйствительно: такъ какъ $C = 2\pi R$, то

$$R = \frac{C}{2\pi} .$$

Теорема 195. Если дана длина радіуса окружности, то въ площади круга заключается столько-же одноименныхъ квадратныхъ единицъ, сколько отвлеченныхъ единицъ заключается въ произведеніи отвлеченнаго числа, выражающаго длину окружности, на половину отвлеченнаго числа, выражающаго длину радіуса.

Доказательство. Пусть длина радіуса выражается буквою R, длина окружности буквою C, а площадь круга буквою O; требуется доказать, что

$$O = C \cdot \frac{R}{2} .$$

Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что (теорема 191) площадь круга есть предѣлъ площади правильнаго описаннаго многоугольника съ безконечно-удваивающимся числомъ сторонъ. Обозначивъ перемѣнную площадь правильнаго описаннаго многоугольника буквою Q, постоянную величину его апоѳемы (она равна радіусу круга) буквою R, а перемѣнную величину его периметра буквою P, получимъ, что всегда

$$Q = \frac{P \cdot R}{2}.$$

Но (теоремы 191 и 190) $Q = O - \alpha$, $P = C - \beta$, гдѣ α и β суть безконечно-малыя величины, а потому (аксіома 5-ая)

$$O - \alpha = \frac{(C - \beta) \cdot R}{2} \text{ или } O - \alpha = \frac{CR - \beta R}{2}.$$

Во второй части этого послѣдняго равенства величина βR безконечно-мала (обозначимъ ее буквою δ); тогда получимъ, что

$$O - \alpha = \frac{CR - \delta}{2}, \text{ откуда } O - \alpha = \frac{CR}{2} - \frac{\delta}{2},$$

гдѣ и α, и $\frac{\delta}{2}$ суть величины безконечно-малыя, а величины O и $\frac{CR}{2}$ суть величины постоянныя; такимъ образомъ имѣемъ двѣ перемѣнныя величины $O - \alpha$ и $\frac{CR}{2} - \frac{\delta}{2}$, которыя равны другъ другу *при всѣхъ* своихъ измѣненіяхъ, а потому и предѣлы ихъ тоже равны между собою (теорема 184). Но предѣлъ первой изъ этихъ величинъ есть величина O, а предѣлъ второй — величина $\frac{CR}{2}$; стало-быть,

$$O = \frac{CR}{2},$$

т. е. въ площади круга содержится столько-же квадратныхъ единицъ, сколько отвлеченныхъ содержится въ произведеніи длины окружности на половину радіуса. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1-ое. Площадь круга содержитъ въ себѣ столько-же квадратныхъ единицъ, сколько отвлеченныхъ единицъ содержится въ произведеніи спрямленія окружности на квадратъ числа, выражающаго длину радіуса. — Дѣйствительно:

$$O = \frac{CR}{2} \text{ (теорема 195), но } C = 2\pi R \text{ (теорема 194);}$$

стало-быть (аксіома 5-ая)

$$O = \frac{2\pi R \cdot R}{2} = \pi R^2 .$$

Слѣдствіе 2-ое. Отношеніе площади круга къ квадрату его радіуса равно спрямленію окружности.—Убѣдиться въ этомъ предоставляется учащемуся.

Замѣчаніе 1-ое. Теорему 195 выражаютъ обыкновенно короче слѣдующимъ образомъ: площадь круга равняется половинѣ произведенія длины окружности на половину радіуса, а слѣдствіе изъ нея такъ: площадь круга равняется произведенію числа π на квадратъ радіуса.

Замѣчаніе 2-ое. Учащемуся предоставляется доказать теорему 195, принявъ во вниманіе, что площадь круга есть предѣлъ площади правильнаго вписаннаго многоугольника съ безконечно удваивающимся числомъ сторонъ.

Теорема 196. *Длина дуги окружности равна длинѣ всей окружности, помноженной на отношеніе числа градусовъ, заключающихся въ данной дугѣ, къ 360-ти.*

Доказательство. Пусть въ дугѣ содержится n градусовъ; требуется доказать, что длина дуги равна

$$2\pi R \cdot \frac{n}{360} .$$

Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что

$$\text{длина дуги въ } 360^0 = 2\pi R \text{ (теорема 194)};$$

$$\text{длина дуги въ } 1^0 = \frac{2\pi R}{360},$$

$$\text{а длина дуги въ } n^0 = \frac{2\pi R \cdot n}{360} = 2\pi R \cdot \frac{n}{360} .$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 197. *Для всякаго центральнаго угла отношеніе длины его дуги къ длинѣ ея радіуса есть величина постоянная, не зависящая отъ длины радіуса.*

Доказательство. Пусть данъ какой нибудь центральный уголъ въ n^0; требуется доказать, что, какова бы ни была длина радіуса, отношеніе длины дуги этого центральнаго угла къ длинѣ ея радіуса есть величина постоянная.—Для доказательства этого, принявъ вершину угла за центръ, радіусомъ X опишемъ одну дугу, а радіусомъ Y—другую. Длину дуги радіуса X обозначимъ буквою x, а длину дуги радіуса Y—буквою y. Тогда (теорема 196)

$$x = 2\pi X \cdot \frac{n}{360}, \text{ а } y = 2\pi Y \cdot \frac{n}{360}.$$

Отсюда найдемъ, что (аксіома 13)

$$\frac{x}{y} = \frac{X}{X} \text{ или } \frac{x}{X} = \frac{y}{Y}.$$

Стало-быть, какова бы ни была длина радіуса, отношеніе длины дуги даннаго центральнаго угла къ длинѣ радіуса есть для этого угла величина постоянная. Что и требовалось доказать.

Опредѣленіе. Отношеніе длины дуги центральнаго угла къ радіусу этой дуги иногда называется *линейною* или *отвлеченною мѣрою* даннаго угла.

Замѣчаніе. Въ математикѣ очень часто подъ угломъ разумѣютъ только *отвлеченную мѣру* его, а не число его градусовъ.—Прямой уголъ поэтому часто обозначаютъ дробью $\frac{\pi}{2}$, выпрямленный буквою π, а полный —такъ: 2π, принимая во вниманіе, что отношеніе длины дуги въ 90^0, въ 180^0 и въ 360^0 къ длинѣ ея радіуса по порядку выражаются числами: $\frac{\pi}{2}$, π и 2π.

Обратно: всякому отвлеченному числу n, выражающему отвлеченную мѣру угла, соотвѣтствуетъ уголъ, число градусовъ котораго легко найти изъ уравненія

$$\frac{2\pi \cdot x}{360} = n,$$

гдѣ x обозначаетъ число градусовъ даннаго угла и откуда

$$x = \frac{n \cdot 360}{2\pi} = \frac{n \cdot 180}{\pi}.$$

Теорема 198. Если въ двухъ секторахъ равныхъ радіусовъ дуги равны между собою, то и площади ихъ между собою равны.

Доказательство этой теоремы ведется съ помощью наложенія и предоставляется учащемуся.

Теорема 199 (обратная теоремѣ 198). Если въ двухъ секторахъ равныхъ радіусовъ площади между собою равны, то и дуги ихъ равны между собою.

Доказательство этой теоремы ведется отъ противоположнаго и предоставляется учащемуся.

Теорема 200. Если въ двухъ секторахъ равныхъ радіусовъ дуги не равны между собою, то площадь одного изъ нихъ отно-

сится къ площади другого какъ длина дуги перваго изъ нихъ относится къ длинѣ дуги второго.

Доказательство этой теоремы ведется тѣмъ же способомъ, какимъ ведется доказательство теоремъ 119 и 169, и предоставляется учащемуся.

Слѣдствіе. Площадь сектора содержитъ въ себѣ столько квадратныхъ единицъ, сколько отвлеченныхъ содержится въ произведеніи числа, выражающаго длину его дуги, на половину числа, выражающаго длину его радіуса.—Дѣйствительно: принявъ площадь круга за площадь сектора, котораго дуга содержитъ 360^0, и обозначивъ длину радіуса буквою R, площадь всякаго другого сектора буквою Q, длину его дуги буквою L, а площадь круга буквою O, найдемъ (теорема 200), что

$$\text{пл. } Q : \text{пл. } O = L : 2\pi R, \text{ откуда пл. } Q = \frac{\text{пл. } O \,.\, L}{2\pi R},$$

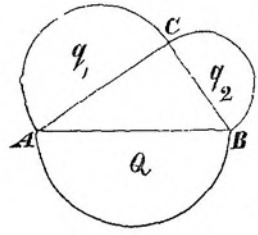
или (аксіома 5 и слѣдствіе теоремы 195)

$$\text{пл. } Q = \frac{\pi R^2 \,.\, L}{2\pi R} = L \,.\, \frac{R}{2},$$

Теорема 201. Площадь полукруга, котораго діаметръ равенъ гипотенузѣ даннаго прямоугольнаго треугольника, равна суммѣ площадей двухъ полукруговъ, которыхъ діаметры равны катетамъ того же прямоугольнаго треугольника.

Доказательство. Пусть (черт. 208) данъ прямоугольный треугольникъ ABC, въ которомъ уголъ C есть прямой; пусть AB есть діаметръ полукруга Q, AC діаметръ полукруга q_1, а BC—діаметръ полукруга q_2; требуется доказать, что

$$\text{пл. } Q = \text{пл. } q_1 + \text{пл. } q_2 .$$



Черт. 208.

Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что

$$\text{пл. } Q = \frac{\pi \,.\, AB^2}{4} \text{ (слѣдствіе теоремы 195).}$$

Но

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \text{ (теорема 178);}$$

стало-быть (аксіома 5)

$$\text{пл. } Q = \frac{\pi \,.\, (AC^2 + BC^2)}{4} = \frac{\pi \,.\, AC^2}{4} + \frac{\pi \,.\, BC^2}{4},$$

Но (слѣдствіе теоремы 195)

$$\frac{\pi \,.\, AC^2}{4} = \text{пл. } q_1 , \text{ а } \frac{\pi \,.\, BC^2}{4} = \text{пл. } q_2 ,$$

стало-быть (аксіома 5):

$$\text{пл. } Q = \text{пл. } q_1 + \text{пл. } q_2 .$$

Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Если около прямоугольнаго треугольника описать окружность, а на катетахъ его построить полуокружности, лежащія внѣ треугольника, то сумма площадей образованныхъ такимъ образомъ луночекъ равна площади даннаго треугольника. — Дѣйствительно: если (черт. 209) $\triangle$ ABC есть треугольникъ прямоугольный, то

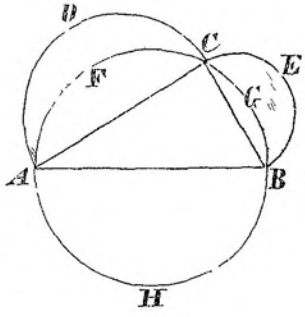
пл. ACDA + пл. BCEB =

= пл. ABHA = пл. AFCGBA;

откуда (аксіома 8), отнявъ отъ равныхъ поровну, а именно сумму:

пл. AFCA + пл. CGBC, получимъ:

пл. ADCFA + пл. BECGB = пл $\triangle$ ABC.



Черт. 209.

Замѣчаніе. Фигуры AFCDA и BGCEB извѣстны подъ названіемъ *Гиппократовыхъ луночекъ*, по имени греческаго геометра Гиппократа, жившаго въ V в. до Р. Хр. Слѣдствіе теоремы 201 убѣждаетъ насъ въ томъ, что площадь нѣкоторыхъ криволинейныхъ фигуръ можетъ быть равна площади нѣкоторой прямолинейной фигуры и что вообще квадратура криволинейной фигуры, т. е. нахожденіе квадрата, равновеликаго данной криволинейной фигурѣ, иногда возможно. Должно однако помнить, что квадратура круга невозможна. (Ср. замѣчаніе, которымъ снабжено изложеніе элементарнаго способа вычисленія спрямленія окружности съ какою угодно степенью точности).

СТЕРЕОМЕТРІЯ.

§ 1. Взаимное пересѣченіе прямой съ плоскостью и двухъ плоскостей.

Допущеніе 6-ое относительно плоскости. —Кромѣ пяти допущеній, сдѣланныхъ въ Планиметріи (§ 1) относительно плоскости, Стереометрія нуждается еще въ одномъ (шестомъ) допущеніи: если въ пространствѣ даны плоскость и двѣ точки по разныя стороны ея. то всякая линія, проходящая чрезъ эти двѣ точки, имѣетъ съ данною плоскостью хоть одну общую точку *).

Теорема 202. Если прямая имѣетъ съ данною плоскостью общую точку и если хоть одна точка этой прямой лежитъ внѣ плоскости, то упомянутая общая точка прямой и плоскости есть единственная общая ихъ точка.

Доказательство. Для доказательства этого предположимъ, что у данной плоскости и данной прямой есть еще одна общая точка; въ такомъ случаѣ (допущеніе 3 е относительно плоскости) точка, лежащая внѣ данной плоскости, также должна лежать на этой плоскости, что̀ невозможно по условію. Стало-быть, если у данной прямой и данной плоскости есть общая точка и если при этомъ хоть одна точка этой прямой лежитъ внѣ данной плоскости, то общая точка данной плоскости и данной прямой есть единственная общая ихъ точка. Что и требовалось доказать.

---

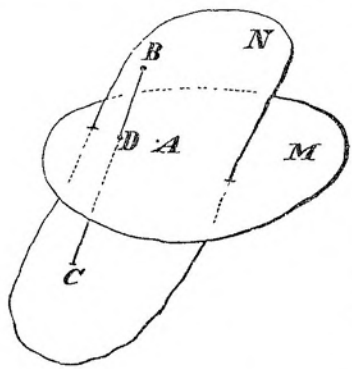
*) Для проведенія какой нибудь опредѣленной плоскости необходимо и достаточно знать три точки ея, не лежащія на одной прямой (Планиметрія, теорема 2-ая). Такимъ образомъ плоскость вполнѣ опредѣляется въ пространствѣ при слѣдующихъ условіяхъ: 1) если даны три ея точки, не лежащія на одной прямой (теорема 2-ая); 2) если даны безконечная прямая, лежащая въ ней, и точка, находящаяся въ той же плоскости, но лежащая внѣ этой прямой (слѣдствіе 1-ое теоремы 2-ой); 3) если даны двѣ пересѣкающіяся прямыя, лежащія въ искомой плоскости (слѣдствіе 2-ое теоремы 2-ой); 4) если дана окружность, лежащая въ ней, и вообще какая бы то ни была плоская не прямая линія, въ ней лежащая (Планиметрія, § 2); 5) если даны двѣ параллельныя прямыя, лежащія въ ней (Планиметрія, § 4).—Планиметрія изучаетъ свойства фигуръ плоскихъ, Стереометрія же изучаетъ свойства фигуръ, точки которыхъ не всѣ лежатъ съ одной и той же плоскости (Введеніе, IX). Нумерація теоремъ ниже, для облегченія справокъ, согласована съ нумераціею теоремъ Планиметріи.

Слѣдствіе. Если прямая соединяетъ двѣ точки, лежащія по разныя стороны данной плоскости, то эта прямая съ плоскостью имѣетъ только одну общую точку.—Дѣйствительно: какая нибудь общая точка должна быть въ этомъ случаѣ у данной плоскости и прямой (допущеніе 6-ое относительно плоскости), и такихъ точекъ у нихъ можетъ быть только одна (теорема 202).

Опредѣленіе. Если у плоскости съ прямой линіею только одна общая точка, то говорятъ, что прямая и плоскость *взаимно пересѣкаются*; общая точка прямой и плоскости, взаимно пересѣкающихся, называется *точкою ихъ пересѣченія* или, просто, ихъ *пересѣченіемъ*.

Теорема 203. Если (черт. 210) двѣ плоскости M и N не совпадаютъ и если у этихъ плоскостей есть хоть одна общая точка A, то у этихъ плоскостей есть еще безчисленное множество общихъ точекъ.

Доказательство. Для доказательства этого возьмемъ въ плоскости N точки B и C, лежащія по разныя стороны плоскости M, и не лежащія съ точкою A на одной прямой, соединимъ точки B и C прямою BC; эта прямая пересѣкаетъ плоскость M въ нѣкоторой точкѣ D (слѣдствіе теоремы 202). Но при этомъ точка D лежитъ не только въ плоскости M, но также и въ плоскости N (допущеніе 3-е относительно плоскости); слѣдовательно точка D есть общая точка плоскостей M и N. Такимъ же образомъ можно доказать, что у этихъ плоскостей есть еще одна общая точка и еще безчисленное множество общихъ точекъ. Что и требовалось доказать.



Черт. 210.

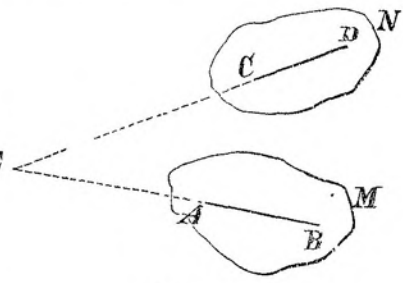
Слѣдствіе. Геометрическое мѣсто всѣхъ общихъ точекъ двухъ несовпадающихъ плоскостей, имѣющихъ общія точки, есть прямая линія, проходящая чрезъ двѣ общія точки этихъ плоскостей.—Дѣйствительно: если бы это геометрическое мѣсто не было прямою, то можно было бы выбрать такія три точки данныхъ двухъ плоскостей, которыя не лежали бы на одной прямой, т. е. данныя плоскости должны были-бы совмѣститься во всѣхъ своихъ точкахъ (теорема 2), что́ противорѣчитъ условію.

Опредѣленіе. Не совпадающія плоскости, у которыхъ есть общія точки, называются *взаимно пересѣкающимися* плоскостями. Прямая линія, принадлежащая двумъ пересѣкающимся плоскостямъ,

называется *линіею пересѣченія* этихъ плоскостей или, просто, ихъ *пересѣченіемъ*.

Теорема 204. Если (черт. 211) въ каждой изъ двухъ пересѣкающихся плоскостей M и N взято по прямой линіи и если эти двѣ прямыя AB и CD пересѣкаются, то точка E пересѣченія этихъ прямыхъ лежитъ на линіи пересѣченія данныхъ плоскостей.

Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что прямая AB находится всѣми своими точками въ плоскости M, а прямая CD — въ плоскости N (допущеніе 3-е относительно плоскости), и предположимъ, что точка пересѣченія прямыхъ AB и CD лежитъ внѣ линіи пересѣченія плоскостей M и N. Въ такомъ случаѣ (слѣдствіе 1-е теоремы 2-ой) плоскости M и N совпадаютъ, что́ противорѣчитъ условію. Стало-быть, если въ каждой изъ двухъ пересѣкающихся плоскостей взято по прямой линіи и если эти двѣ прямыя пересѣкаются, то точка ихъ пересѣченія лежитъ на линіи пересѣченія данныхъ плоскостей. Что́ и требовалось доказать.



Черт. 211.

§ 2. Взаимно-параллельныя прямая линія и плоскость и параллельныя прямыя въ пространствѣ.

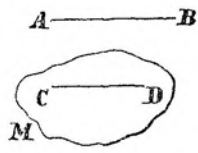
Теорема 205. Изъ точки, взятой внѣ данной прямой, къ этой прямой можно провести только одну параллельную прямую.

Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что мы имѣемъ дѣло съ точкою и прямою, взятыми не на плоскости, а въ пространствѣ, и проведемъ плоскость чрезъ данную точку и данную прямую (слѣдствіе 2-е теоремы 2-й); затѣмъ изъ данной точки проведемъ прямую, параллельную къ данной прямой, въ проведенной нами плоскости (теорема 32). Всякая другая прямая, проведенная изъ той же точки, не будетъ параллельна данной прямой: она либо пересѣчетъ данную прямую, либо же не будетъ лежать въ плоскости, проходящей чрезъ данную прямую и данную точку. Стало-быть, изъ точки, взятой внѣ данной прямой, къ этой прямой можно провести только одну параллельную прямую. Что и требовалось доказать.

Теорема 206. Если (черт. 212) прямая AB, лежащая внѣ данной плоскости M, параллельна къ прямой CD, лежащей на этой

плоскости, то первая прямая и данная плоскость не пересѣкутся, какъ бы далеко ихъ ни продолжали.

Доказательство. Для доказательства этого представимъ себѣ ту плоскость, въ которой лежатъ взаимно параллельныя прямыя AB и CD. Убѣдимся, что прямая AB, какъ бы далеко ее ни продолжали, не можетъ пересѣчь прямую CD. А въ такомъ случаѣ прямая AB не можетъ пересѣчь также и плоскость M, потому что если бы она ее пересѣкла, то непремѣнно въ точкѣ, лежащей на пересѣченіи плоскости M съ плоскостью, въ которой лежатъ прямыя AB и CD (теорема 204), т. е. пересѣкла бы ее въ точкѣ, лежащей на прямой CD. Что противорѣчитъ условію. Стало-быть, если прямая AB, лежащая внѣ плоскости M, параллельна къ прямой CD, лежащей въ этой плоскости, то прямая AB и плоскость M никогда не пересѣкутся, какъ бы далеко ихъ ни продолжали. Что̀ и требовалось доказать.



Черт. 212.

Слѣдствіе. Изъ точки, взятой внѣ плоскости, можно провести къ этой плоскости безчисленное множество прямыхъ линій, ея не пересѣкающихъ, какъ бы далеко ихъ ни продолжали.—Дѣйствительно: проведя произвольную плоскость чрезъ данную точку и какую либо точку данной плоскости, мы получимъ нѣкоторую прямую линію пересѣченія этихъ плоскостей (теорема 203), а проведя въ проведенной плоскости прямую, параллельную къ этой линіи пересѣченія, получимъ прямую, которая не пересѣкаетъ данной плоскости, какъ бы ихъ далеко ни продолжали.

Опредѣленіе. Прямая и плоскость называются *параллельными* одна къ другой, если онѣ не пересѣкаются, какъ бы далеко ихъ ни продолжали.

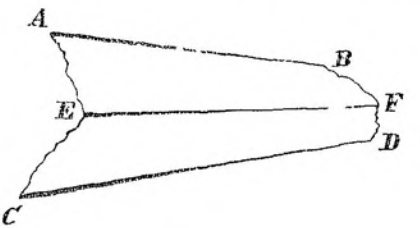
Теорема 207, (обратная теоремѣ 206). Если (черт. 213) нѣкоторая прямая AB параллельна нѣкоторой плоскости M и если черезъ эту прямую провести какую-нибудь плоскость N, которая пересѣкаетъ данную плоскость, то линія пересѣченія CD этихъ двухъ плоскостей параллельна данной прямой AB.

Черт. 213.

Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что если-бы прямая CD не была параллельна прямой AB, то эти прямыя, находясь въ одной и той же плоскости N, должны были-бы пересѣчься. Но въ такомъ случаѣ точка ихъ пересѣченія должна была бы лежать на прямой CD (теорема 204), т. е. прямая AB должна была бы пересѣчь также и плоскость M и

не была бы параллельна плоскости M. Что противорѣчитъ условію. Стало-быть, прямая AB || CD. Что́ и требовалось доказать.

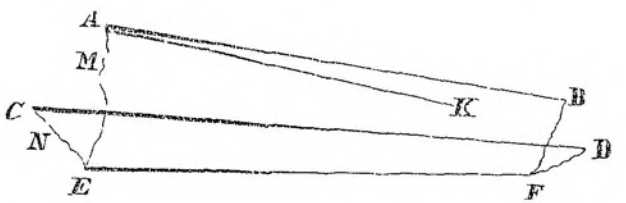
Слѣдствіе. Если (черт. 214) черезъ данныя двѣ взаимно-параллельныя прямыя AB и CD проведены двѣ пересѣкающіяся плоскости, то линія EF пересѣченія этихъ плоскостей параллельна каждой изъ данныхъ двухъ прямыхъ. — Дѣйствительно: одна плоскость, проходящая чрезъ прямую AB параллельна прямой CD, взятой внѣ ея, а чрезъ эту прямую проведена вторая плоскость; эта послѣдняя первую должна пересѣчь въ прямой EF, параллельной къ прямой CD (теорема 207). Точно такъ же убѣдимся въ томъ, что EF || AB *).



Черт. 214.

Теорема 208. Если (черт. 215) каждая изъ двухъ данныхъ прямыхъ AB и CD параллельна нѣкоторой третьей EF, то, какъ-бы всѣ эти прямыя ни лежали въ пространствѣ, данныя двѣ прямыя AB и CD параллельны одна другой.

Доказательство. При доказательствѣ этой теоремы примемъ во вниманіе два случая: 1) когда всѣ три прямыя лежатъ въ одной плоскости, и 2) когда онѣ лежатъ не въ одной плоскости.—Въ первомъ случаѣ AB || CD (теорема 35). Во второмъ случаѣ (черт. 215) черезъ прямыя AB и EF проведемъ плоскость M, а



Черт. 215.

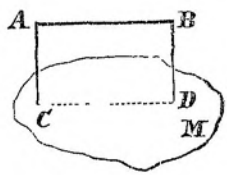
чрезъ прямыя CD и EF—плоскость N, и предположимъ, что AB и CD не параллельны. Это значитъ, что либо прямыя AB и CD, находясь въ одной плоскости пересѣкаются, либо же—что плоскость, проведенная чрезъ прямую CD и какую нибудь точку A прямой AB, не проходитъ чрезъ прямую AB. Первое предположеніе не вѣрно, потому что въ такомъ случаѣ (теорема 204) прямыя

*) При выполненіи чертежей полезно части линій болѣе близкія къ глазу дѣлать толще болѣе отдаленныхъ частей.

AB и CD пересѣкались бы въ нѣкоторой точкѣ, лежащей на прямой EF, т. е. каждая изъ прямыхъ AB и CD пересѣклась бы съ прямою EF (что противорѣчитъ условію). Второе предположеніе тоже невѣрно: дѣйствительно, проведя чрезъ прямую CD и точку A плоскость и предположивъ, что эта плоскость не пройдетъ чрезъ прямую AB, получимъ, что эта плоскость пересѣчетъ плоскость M въ нѣкоторой прямой AK (теорема 203). Прямая AK должна быть параллельна прямой EF (теорема 207); это значитъ, что изъ точки A проведены къ прямой EF двѣ параллельныя прямыя. Чего быть не можетъ (теорема 205). Стало-быть, если изъ двухъ прямыхъ линій каждая параллельна нѣкоторой третьей, то онѣ параллельны другъ другу. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1-ое. Если одна прямая параллельна другой, а другая параллельна третьей, то первая также параллельна третьей, какъ бы эти прямыя ни лежали.—Убѣдиться въ этомъ предоставляется учащемуся.

Слѣдствіе 2-ое. Если даны двѣ точки, лежащія внѣ данной прямой и не лежащія на прямой, параллельной къ этой прямой, то чрезъ нихъ можно провести плоскость, параллельную къ данной прямой, и притомъ только одну такую плоскость.—Дѣйствительно: проведя изъ этихъ двухъ точекъ двѣ прямыя, порознь параллельныя данной прямой, и проведя чрезъ эти двѣ прямыя плоскость, получимъ плоскость, притомъ единственную плоскость, параллельную къ данной прямой (теорема 206) и проходящей чрезъ данныя двѣ точки.



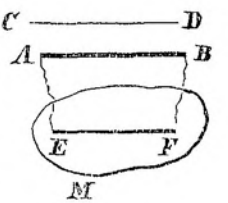
Черт. 216.

Теорема 209. Если (черт. 216) изъ двухъ точекъ данной прямой AB, параллельной къ данной плоскости M, провести двѣ прямыя AC и BD, параллельныя другъ другу, до пересѣченія ихъ съ данною плоскостью, то отрѣзки этихъ параллельныхъ, заключенные между прямою и плоскостью, равны между собою.

Доказательство. *Для доказательства этого проведемъ* чрезъ прямыя AC и BD плоскость, которая пересѣчетъ плоскость M въ прямой CD, параллельной къ прямой AB (теорема 207). Тогда (слѣдствіе теоремы 69) AC = BD. Что и требовалось доказать.

Теорема 210. Если (черт. 217) данная прямая AB параллельна данной плоскости M, то всякая прямая CD, параллельная этой прямой и лежащая внѣ этой плоскости, параллельна той-же плоскости.

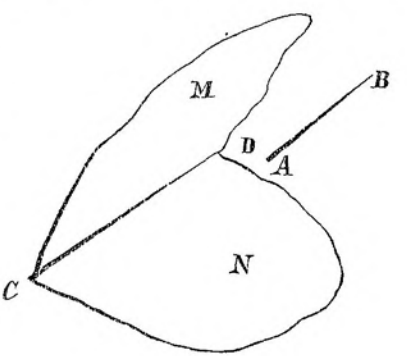
Доказательство. Для доказательства этого черезъ прямую AB проведемъ какую-нибудь плоскость, которая пересѣкала бы плоскость M въ какой нибудь прямой EF. Это прямая EF параллельна AB (теорема 207); по по условію CD || AB, стало-быть (теорема 208) CD параллельна EF, а въ такомъ случаѣ она параллельна и плоскости M (теорема 206). Что и требовалось доказать.



Черт. 217.

Замѣчаніе. Когда говорятъ о двухъ параллельныхъ прямыхъ, то часто бываетъ очень полезно имѣть въ виду ихъ направленіе въ пространствѣ или въ плоскости. Параллельныя другъ другу прямыя могутъ имѣть либо одно и то же направленіе, либо прямо-противоположныя направленія. (Что при этомъ называется направленіемъ и какія направленія въ параллельныхъ прямыхъ называются одинаковыми, а какія—прямо-противоположными,—знаетъ всякій, и понятія эти принадлежатъ къ числу основныхъ, первоначальныхъ, не подлежащихъ опредѣленію). Кромѣ того, весьма полезно считать, что каждая сторона прямолинейнаго угла идетъ въ направленіи отъ вершины къ точкамъ, лежащимъ на этой сторонѣ. Такъ, напр., благодаря этому, теорема 38 и слѣдствіе ея могутъ быть формулированы слѣдующимъ образомъ: если въ плоскости стороны одного остраго или тупого угла порознь параллельны сторонамъ другого угла и если при этомъ взаимно-параллельныя стороны имѣютъ одно и то же или прямо противоположныя направленія, то углы эти равны между собою; въ противномъ случаѣ они взаимно дополняютъ другъ друга до двухъ прямыхъ.

Теорема 211. Если (черт. 218) изъ двухъ пересѣкающихся плоскостей M и N каждая параллельна нѣкоторой прямой, то линія пересѣченія этихъ плоскостей параллельна той-же прямой.



Черт. 218.

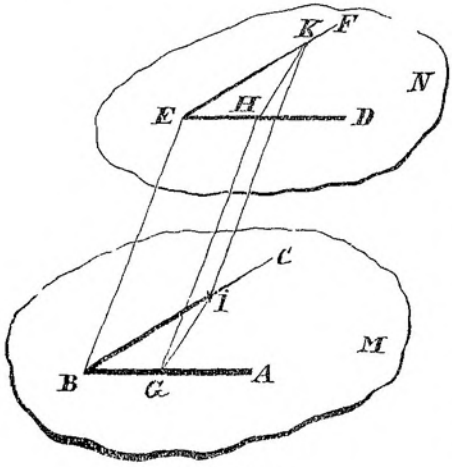
Доказательство. Для доказательства этого изъ какой-нибудь точки C линіи пересѣченія плоскостей M и N проведемъ прямую, параллельную къ прямой AB. Эта прямая должна лежать непремѣнно въ каждой изъ этихъ плоскостей (теорема 207), а потому она должна совпасть съ ихъ пересѣченіемъ, т. е. линія CD пе-

ресѣченія данныхъ плоскостей M и N параллельна къ линіи AB. Что и требовалось доказать.

§ 3. Взаимно-параллельныя плоскости.

Теорема 212. Если (черт. 219) стороны одного остраго или тупого угла ABC порознь параллельны сторонамъ другого угла DEF, лежащаго въ другой плоскости, и если при этомъ взаимно-параллельныя стороны имѣютъ одно и то же направленіе, то эти углы равны между собою.

Доказательство. Для доказательства этого соединимъ точку B съ точкою E, отложимъ отрѣзокъ BG, равный EH, и BI, равный EK, соединимъ точку H съ G, а K съ I; тогда получимъ фигуры BGHE и BIKE, которыя должны быть параллелограммами и въ которыхъ HG ∥ KI (лемма 3-я, стр. 62) Соединивъ прямыми точку I съ G, а точку K съ точкою H, получимъ фигуру GHKI, въ которой KH = ID (лемма 3-я). А вътакомъ случаѣ △ GBI = △ HEK (теорема 51). Стало-быть, ∠B равенъ углу E. Что и требовалось доказать.



Черт. 219.

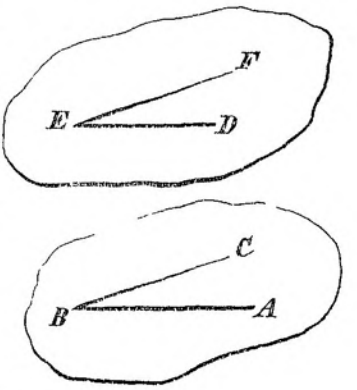
Слѣдствіе 1-ое. Если стороны одного остраго или тупого угла порознь параллельны сторонамъ другого, лежащаго въ другой плоскости, и если притомъ взаимно-параллельныя стороны имѣютъ прямо-противоположныя направленія, то эти углы равны между собою.—Для того чтобы въ этомъ убѣдиться, достаточно продолжить въ противоположныхъ направленіяхъ стороны одного изъ данныхъ угловъ.

Слѣдствіе 2-ое. Если стороны одного остраго или тупого угла порознь параллельны сторонамъ другого, лежащаго въ другой плоскости, и если притомъ двѣ взаимно-параллельныя стороны имѣютъ одно и то же, а остальныя двѣ—прямо-противоположныя направленія, то эти углы взаимно дополняютъ другъ друга до 2d — Убѣдиться въ этомъ предоставляется учащемуся.

Замѣчаніе. Учащемуся предоставляется убѣдиться также въ справедливости слѣдующаго предложенія: если два, лежащіе въ

разныхъ плоскостяхъ, угла, стороны которыхъ порознь параллельны другъ другу, равны между собою и если, притомъ, двѣ взаимно-параллельныя стороны имѣютъ одно и то же, а остальныя двѣ имѣютъ прямо-противоположныя направленія, то эти углы прямые.

Теорема 213. Если (черт. 220) стороны одного угла ABC параллельны сторонамъ другого DEF, лежащаго въ другой плоскости, то плоскости этихъ угловъ никогда не пересѣкутся, какъ бы далеко ихъ ни продолжали.

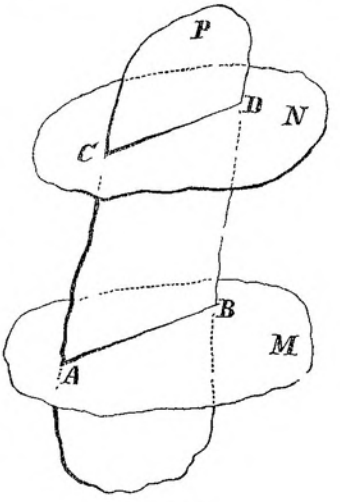


Черт. 220

Доказательство. Для доказательства этого предположимъ, что плоскости, въ которыхъ лежатъ эти углы, по достаточномъ продолженіи пересѣкаются: тогда (теорема 211) линія ихъ пересѣченія должна быть параллельна и прямой AB, и прямой BC; а въ такомъ случаѣ изъ точки B, взятой внѣ этой линіи пересѣченія, будутъ проведены двѣ параллельныя къ этой линіи прямыя. Чего быть не можетъ (теорема 205). Стало-быть, если стороны одного угла параллельны сторонамъ другого, лежащаго въ другой плоскости, то плоскости этихъ угловъ не пересѣкутся, какъ бы далеко ихъ ни продолжали. Что и требовалось доказать.

Опредѣленіе. Двѣ плоскости, которыя не пересѣкаются, какъ бы далеко ихъ ни продолжали, называются *взаимно-параллельными плоскостями.*

Теорема 214. Если (черт. 221) двѣ взаимно-параллельныя плоскости M и N пересѣкаются третьею плоскостью P, то линіи пересѣченія AB и CD этой послѣдней съ данными взаимно-параллельными плоскостями параллельны другъ другу.



Черт. 221.

Доказательство. Для доказательства этого предположимъ, что прямыя AB и CD другъ другу не параллельны; тогда онѣ, находясь въ одной и той же плоскости P, должны пересѣчься. Но онѣ въ то же самое время лежатъ въ плоскостяхъ M и N; слѣдовательно

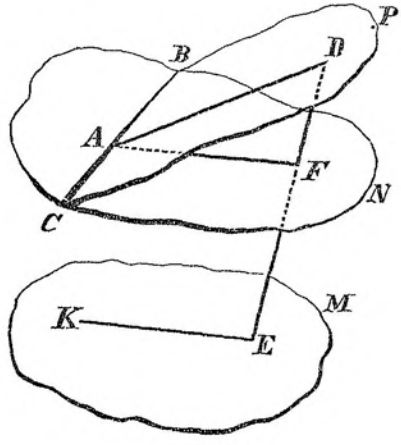
и плоскости M и N въ такомъ случаѣ должны имѣть хоть одну общую точку, чего быть не можетъ. Стало-быть, прямыя AB и CD взаимно параллельны. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1-ое. Чрезъ точку, взятую внѣ плоскости, къ этой плоскости можно провести плоскость ей параллельную.—Дѣйствительно: проведемъ въ данной плоскости какой нибудь уголъ, отличающійся отъ нуля и отъ выпрямленнаго угля, а затѣмъ проведемъ изъ точки, данной внѣ плоскости, прямыя порознь параллельныя сторонамъ построеннаго въ другой плоскости угла. Проведенная чрезъ эти двѣ прямыя плоскость параллельна данной плоскости.

Слѣдствіе 2-ое. Если двѣ плоскости взаимно-параллельны и если въ одной изъ нихъ построенъ уголъ, то въ другой можетъ быть построенъ такой уголъ, стороны котораго порознь параллельны сторонамъ другого угла.—Дѣйствительно: взявъ любую точку во второй плоскости и проведя плоскость чрезъ стороны даннаго угла и эту точку, получимъ уголъ, образованный линіями пересѣченія вспомогательныхъ плоскостей со второю изъ данныхъ плоскостей. Эти линіи и ресѣченія порознь параллельны сторонамъ даннаго въ первой плоскости угла (теорема 207).

Слѣдствіе 3-ье. Если двѣ плоскости взаимно параллельны и если нѣкоторая безконечная прямая пересѣкаетъ одну изъ этихъ плоскостей, то она пересѣкаетъ также и другую изъ нихъ.—Въ справедливости этого предоставляется убѣдиться учащемуся.

Теорема 215. Чрезъ точку A, взятую внѣ плоскости M, (черт. 222) можно провести только одну плоскость, параллельную къ этой плоскости.



Черт. 222.

Доказательство. Для доказательства этого предположимъ, что чрезъ точку A, кромѣ плоскости N, параллельной къ плоскости M, можно провести еще одну плоскость P, параллельную къ плоскости M; пусть эта плоскость пересѣкаетъ плоскость N въ прямой BC, проходящей чрезъ точку A. Возьмемъ въ плоскости P какую либо точку D, а въ плоскости M какую-либо точку E; проведемъ чрезъ нихъ прямую DE, которая должна пересѣчь плоскость N въ какой нибудь точкѣ F (допущеніе 6-ое относительно плоскости). Соединимъ далѣе точку

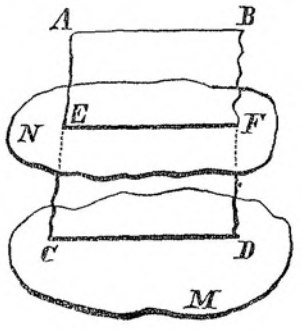
A съ точками D и F; проведемъ чрезъ точки A, F и E плоскость, которая пересѣчетъ плоскость M въ какой нибудь прямой EK. Но прямая AF || FK, равнымъ образомъ прямая AD || EK (теорема 207); слѣдовательно изъ точки A къ прямой KE проведены двѣ параллельныя прямыя. Чего быть не можетъ. Стало-быть, изъ точки, взятой внѣ плоскости, къ этой послѣдней можно провести только одну параллельную плоскость. Что и требовалась доказать.

Слѣдствіе 1-ое. Если нѣкоторая плоскость пересѣкаетъ одну изъ взаимно параллельныхъ плоскостей, то она по достаточномъ продолженіи пересѣчетъ также и другую изъ нихъ.—Дѣйствительно: если бы мы предположили, что она ея не пересѣчетъ, то мы получили бы, что изъ точки взятой внѣ плоскости къ этой послѣдней можно провести двѣ параллельныя плоскости. Чего быть не можетъ.

Слѣдствіе 2-ое. Если изъ двухъ плоскостей M и N каждая параллельна нѣкоторой третьей P, то онѣ также параллельны другъ другу. —Дѣйствительно: пусть изъ двухъ плоскостей M и N, каждая параллельна плоскости P; если онѣ другъ другу не параллельны, то онѣ должны имѣть общую линію пересѣченія, т. е. общія точки, и тогда чрезъ точку, взятую внѣ плоскости P, были-бы проведены двѣ плоскости къ ней параллельныя. Чего быть не можетъ.

Слѣдствіе 3-е. Если чрезъ точку, взятую внѣ плоскости, провести къ ней параллельныя прямыя, то геометрическое мѣсто всѣхъ этихъ прямыхъ, параллельныхъ данной плоскости и проведенныхъ изъ данной точки пространства, есть плоскость параллельная данной плоскости. —Убѣдиться въ этомъ предоставляется учащемуся.

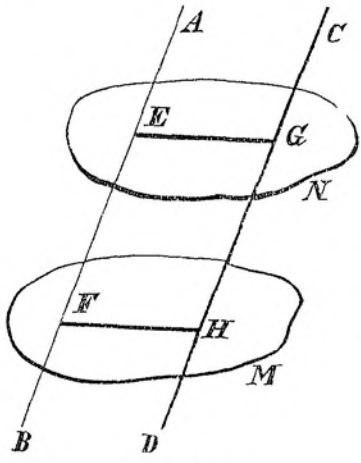
Теорема 216. Если (черт. 223) даны двѣ взаимно-параллельныя плоскости M и N и если нѣкоторая прямая AB, лежащая внѣ каждой изъ нихъ, параллельна къ одной изъ этихъ плоскостей, напр., къ плоскости M, то она также параллельна къ другой.



Черт. 223.

Доказательство. Для доказательства этого проведемъ черезъ прямую AB плоскость, которая пересѣкла бы плоскость M въ прямой CD; въ такомъ случаѣ (слѣдствіе 1-ое теоремы 215) эта плоскость пересѣчетъ и плоскость N; предположимъ, что она ее пересѣчетъ въ прямой EF. Прямая AB параллельна плоскости M, стало-быть, параллельна также и прямой EF (теорема 207). Плос-

кость M параллельна плоскости N, стало-быть, EF параллельна прямой CD (теорема 207). Такимъ образомъ изъ трехъ прямыхъ AB, CD и EF, прямая AB ∥ CD, а CD ∥ EF или (слѣдствіе 1-ое теоремы 208) AB ∥ EF. А потому прямая AB параллельна также и плоскости M (теорема 206). Стало-быть, если прямая, лежащая внѣ каждой изъ двухъ взаимно-параллельныхъ плоскостей, параллельна одной изъ нихъ, то она параллельна также и къ другой изъ нихъ. Что̀ и требовалось доказать.



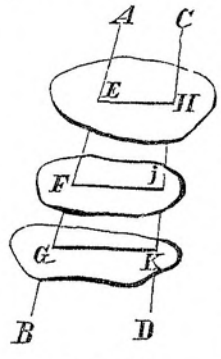
Черт. 224.

Теорема 217. Если (черт. 224) двѣ параллельныя плоскости M и N пересѣкаются двумя параллельными прямыми AB и CD, то эти плоскости отсѣкаютъ отъ данныхъ прямыхъ равные между собою отрѣзки.

Доказательство. Для доказательства этого черезъ параллельныя прямыя EF и GH проведемъ плоскость которая пересѣчетъ плоскости M и N въ прямыхъ EG и FH, параллельныхъ другъ другу, а потому (теорема 69) EF = GH. Что и требовалось доказать.

Теорема 218. Три параллельныя другъ другу плоскости M, N и P отсѣкаютъ отъ двухъ прямыхъ AB и CD, ихъ пересѣкающихъ, части пропорціональныя.

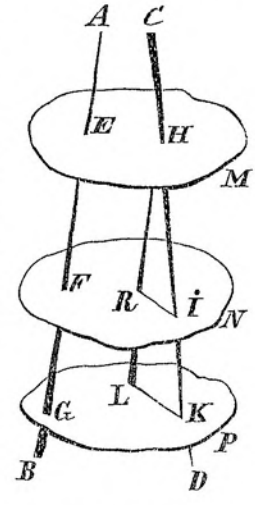
Доказательство. При доказательствѣ этой теоремы можно различать два случая: 1) когда прямыя AB и CD лежатъ въ одной плоскости, и 2) когда онѣ не лежатъ въ одной плоскости. Въ первомъ случаѣ (черт. 225) проведемъ чрезъ нихъ плоскость, которая пересѣчетъ плоскости M, N и P въ прямыхъ линіяхъ (слѣдствіе теоремы 203), параллельныхъ другъ другу (теорема 214). А въ такомъ случаѣ (теорема 131)



Черт. 225.

EF : FG = HI : IK.

Во второмъ случаѣ (черт. 226) изъ точки H проведемъ прямую HL, параллельно къ прямой



Черт. 226.

AB; пусть прямая пересѣчетъ плоскость N въ точкѣ R, а плоскость P въ точкѣ L. Черезъ прямыя HL и AB проведемъ плоскость, которая пересѣчетъ плоскости M, N и P въ прямыхъ RI и LK. Тогда HR = EF, а RL = FG (теорема 217); кромѣ того (слѣдствіе теоремы 131)

$$HR : RL = HI : IK,$$

откуда (аксіома 5-ая):

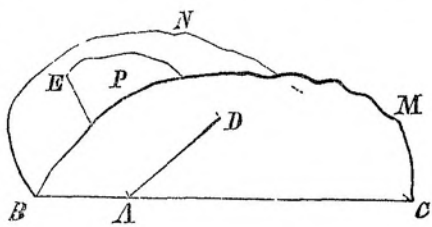
$$EF : FG = HI : IK.$$

Что и требовалось доказать:

§ 4. Взаимно-перпендикулярныя прямая и плоскость.

Теорема 219. Изъ точки X, взятой на данной плоскости K можетъ быть проведена прямая, перпендикулярная къ какимъ нибудь двумъ прямымъ проведеннымъ чрезъ эту точку въ той же плоскости.

Доказательство. Для доказательства этого на произвольной прямой BC въ пространствѣ (черт. 227) возьмемъ точку A и чрезъ прямую BC проведемъ двѣ произвольныя плоскости M и N. Затѣмъ изъ точки A проведемъ въ плоскости M прямую AD, перпендикулярную къ прямой BC; равнымъ образомъ изъ той же точки A проведемъ въ плоскости N прямую AE, перпендикулярную къ прямой BC. Далѣе чрезъ прямыя AD и AE проведемъ плоскость P. Тогда прямая AC перпендикулярна въ одно и то же время къ нѣкоторымъ двумъ прямымъ AB и AE, проведеннымъ въ плоскости P чрезъ точку A. Теперь остается фигуру, образованную углами CAD, DAE и EAC, отдѣлить отъ остальныхъ элементовъ полученной нами фигуры и, не измѣняя формы этой отдѣленной фигуры, наложить входящую въ составъ ея плоскость P на данную плоскость K (которая на чертежѣ не изображена) такъ, чтобы точка A совпала съ точкою X, а прямыя AD и AE совпали бы съ какими либо двумя прямыми XY и XZ этой плоскости. Тогда прямая AC въ новомъ своемъ положеніи будетъ перпендикулярна къ двумъ прямымъ XY и XZ, проведеннымъ въ плоскости K. Стало-быть, изъ точки X, взятой на данной плоскости K, можетъ быть проведена прямая AC, перпендикулярная къ нѣкоторымъ двумъ прямымъ XY и XZ, проведеннымъ чрезъ точку X въ той же плоскости. Что и

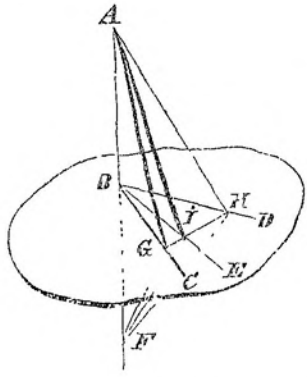


Черт. 227.

Замѣчаніе. Теорема 219 доказываетъ, что прямая, перпендикулярная къ двумъ пересѣкающимся прямымъ, проведеннымъ въ данной плоскости, существуетъ.

Теорема 220. Если (черт. 228) прямая AB перпендикулярна къ двумъ прямымъ BC и BD, проведеннымъ въ данной плоскости чрезъ точку B ея пересѣченія съ этой плоскостью, то эта прямая перпендикулярна ко всякой прямой BE, проходящей чрезъ ту же точку и лежащей въ той же плоскости.

Доказательство.—Для доказательства этого чрезъ прямую AB и BD проведемъ плоскость и продолжимъ ее по другую сторону плоскости M; точно также проведемъ плоскость чрезъ прямыя AB и BC и продолжимъ ее по другую сторону данной плоскости. Далѣе продолжимъ прямую AB по другую сторону плоскости и на продолженіи отложимъ прямую BF, равную прямой AB. Потомъ чрезъ какія-нибудь двѣ точки G и H прямыхъ BC и BD проведемъ прямую GH, которая пересѣчетъ прямую BE въ какой нибудь точкѣ I; наконецъ, соединимъ точки A и F съ точками G, H и I. Тогда получимъ равнобедренные треугольники AGF и AHF, въ которыхъ AG = GF, а AH = HF (слѣдствіе 2-ое теоремы 51-ой). Проведя плоскость чрезъ точки A, G и H, а также плоскость чрезъ точки F, G и H, получимъ два равныхъ треугольника AGH и FGH (теорема 50), и въ этихъ тр-кахъ ∠ AGH = ∠ FGH. Поэтому, △ AGI = △ FGI (теорема 51), и сторона AI = FI. Такимъ образомъ △ AIF есть треугольникъ равнобедренный, и въ немъ BI ⊥ AF (слѣдствіе 1-ое теоремы 55), т. е. прямая AB ⊥ BE. Что и требовалось доказать.



Черт. 228.

Замѣчаніе. Если третью прямую BE провести внѣ угла DBC, то доказательство останется по существу то же, но при этомъ необходимо прямую GH провести такъ, чтобы она пересѣкла прямую BE; въ противномъ случаѣ тр—къ AIF не будетъ образованъ. Выполненіе чертежа и доказательства предоставляется учащемуся.

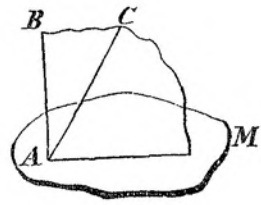
Опредѣленіе. Прямая, перпендикулярная ко всякой прямой, проведенной въ данной плоскости черезъ точку пересѣченія этой прямой съ плоскостью, называется *прямою перпендикулярною къ данной плоскости*, или же просто *перпендикуляромъ къ данной плоскости*; плоскость, къ которой данная прямая перпендикулярна, называется *плоскостью, перпендикулярною къ данной прямой*.

Теорема 221. Изъ точки, взятой въ данной плоскости, къ этой плоскости можно провести перпендикуляръ.

Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе теорему 219 и изъ точки, взятой въ данной плоскости проведемъ въ той же плоскости двѣ пересѣкающіяся прямыя и такую прямую, которая была бы перпендикулярна къ обѣимъ этимъ прямымъ. А въ такомъ случаѣ эта послѣдняя прямая (теорема 220) перпендикулярна и къ самой плоскости. Стало-быть, изъ точки, взятой на плоскости, къ этой плоскости можно провести перпендикуляръ. Что и требовалось доказать

Теорема 222. Изъ точки А, взятой на плоскости М (черт. 229) къ этой плоскости можно провести только одинъ перпендикуляръ.

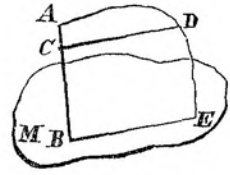
Доказательство. Для доказательства этого предположимъ, что, кромѣ прямой АВ, перпендикулярной къ данной плоскости М, мы провели прямую АС, которая тоже перпендикулярна къ плоскости М; зàсимъ проведемъ плоскость черезъ точки А, В и С, которая пересѣчетъ плоскость М въ нѣкоторой прямой АМ (теорема 203). Прямая АВ должна, по условію, быть перпендикулярна къ АМ, точно также и прямая АС должна быть перпендикулярна къ АМ; такимъ образомъ мы получили, что изъ точки, взятой на прямой АМ въ одной и той-же плоскости, къ этой прямой проведено два перпендикуляра, чего быть не можетъ (теорема 7). Стало-быть, изъ точки, взятой на плоскости, къ этой плоскости можетъ быть проведенъ только одинъ перпендикуляръ. Что и требовалось доказать.



Черт. 229.

Теорема 223. Если (черт. 230) прямая АВ перпендикулярна къ плоскости М, а другая прямая CD, проведенная изъ какой-нибудь точки данной прямой, параллельна плоскости, то эти двѣ прямыя линіи взаимно-перпендикулярны.

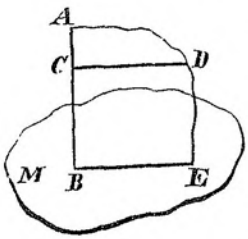
Доказательство. Для доказательства этого черезъ АВ и CD проведемъ плоскость, которая пересѣчетъ плоскость М въ прямой ВЕ. Такъ какъ прямая АВ перпендикулярна къ плоскости М, то она перпендикулярна къ прямой ВЕ; такъ какъ CD параллельна къ ВЕ (теорема 207), то АВ перпендикулярна и къ CD (теорема 31). Что и требовалось доказать.



Черт. 230.

Теорема 224, (обратная теоремѣ 223). Если (черт. 231) прямая AB перпендикулярна къ плоскости то всякая прямая CD, перпендикулярная къ данной прямой, и не лежащая въ этой плоскости, параллельна той же плоскости.

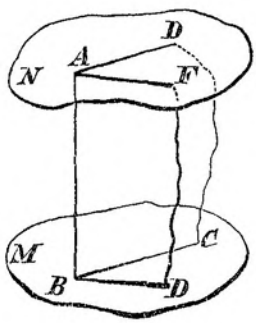
Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что плоскость угла BCD, должна пересѣчь плоскость M въ нѣкоторой прямой BE. Такъ какъ AB перпендикулярна къ M по условію, то она перпендикулярна и къ прямой BE; но, по условію, она перпендикулярна къ прямой CD, лежащей съ прямою BE въ одной плоскости. Стало-быть, CD и BE, лежащія въ одной и той-же плоскости, перпендикулярны къ одной и той-же прямой AB, т. е. взаимно-параллельны (теорема 14); а въ такомъ случаѣ прямая CD параллельна также и плоскости M (теорема 206). Что требовалось доказать.



Черт. 231.

Теорема 225. Если (черт. 232) двѣ плоскости M и N взаимно-параллельны, то прямая AB, перпендикулярная къ одной изъ нихъ, а именно къ плоскости M, перпендикулярна также и къ другой.

Доказательство. Для доказательства этого проведемъ чрезъ основаніе B перпендикуляра AB какую-нибудь прямую BC въ плоскости M, а затѣмъ проведемъ плоскость черезъ прямыя AB и BC. Эта плоскость пересѣчетъ плоскость N въ какой нибудь прямой AD, которая будетъ параллельна BC (теорема 214), и AB такимъ образомъ должна быть перпендикулярна также и къ прямой AD. Взявъ въ плоскости M еще одну прямую BD, образующую съ прямою BC уголъ, отличающійся отъ нуля и отъ выпрямленнаго, и проведя плоскость черезъ прямыя AB и BD, получимъ новую линію AF пересѣченія этой плоскости съ плоскостью M; эта прямая AF параллельна BD (теорема 214) и должна быть также перпендикулярна къ AB (теорема 31). Такимъ образомъ AB перпендикулярна къ двумъ прямымъ AD и AF, проведеннымъ въ плоскости N; поэтому она перпендикулярна и къ самой плоскости N (теорема 220). Что и требовалось доказать.

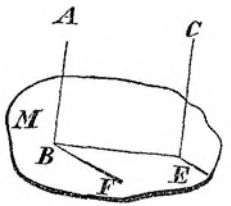


Черт. 232.

Теорема 226. Если (черт. 233) изъ двухъ параллельныхъ линій AB и CD одна (напр. первая) перпендикулярна къ дан-

ной плоскости M, то и другая перпендикулярна съ той же плоскости.

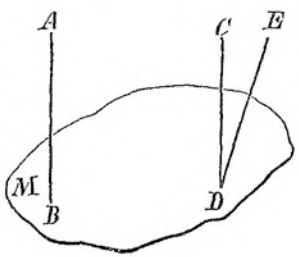
Доказательство. Для доказательства этого проведемъ плоскость, въ которой лежатъ обѣ параллельныя прямыя, и линію BE пересѣченія ея съ плоскостью M; убѣдимся, что (теорема 220) CE ⊥ BE. Теперь остается доказать, что CE перпендикулярна еще къ одной прямой, напр., къ прямой ED, проведенной въ плоскости M. Для доказательства этого въ плоскости M, проведемъ изъ точки B прямую BF, а изъ точки E, прямую DE параллельную къ BF и имѣющую то же направленіе, что прямая BF. Тогда AB перпендикулярна къ BF, а ∠CED = ∠ABF (теорема 212), т. е. уголъ CDE есть тоже прямой, а потому прямая CE перпендикулярна и къ прямой ED, т. е. (теорема 220) она тоже перпендикулярна къ плоскости M. Что и требовалось доказать.



Черт. 233.

Теорема 227 (обратная теоремѣ 226). Если двѣ прямыя AB и CD перпендикулярны къ одной и той же плоскости M, то онѣ другъ другу параллельны.

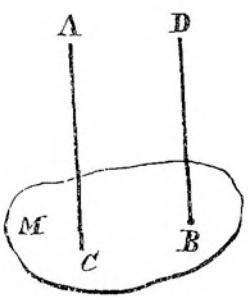
Доказательство. Для доказательства этого предположимъ, что онѣ не параллельны; стало-быть, изъ точки D плоскости M, можно провести какую нибудь прямую DE, параллельную къ AB. Тогда (теорема 227) изъ точки D плоскости M къ ней проведены двѣ перпендикулярныя прямыя DC и DE, чего быть не можетъ (теорема 222). Стало быть, прямая CD параллельна прямой AB. Что и требовалось доказать.



Черт. 234.

Теорема 228. Изъ точки A, взятой внѣ плоскости M, къ этой плоскости можно провести перпендикуляръ.

Доказательство. Для доказательства этого возьмемъ какую нибудь точку B на плоскости M и проведемъ перпендикуляръ къ плоскости M изъ этой точки (теорема 221). Если-бы перпендикуляръ, проведенный изъ точки B къ плоскости M, прошелъ черезъ точку A, то подлежащая доказательству теорема была-бы доказана. Если же перпендику-

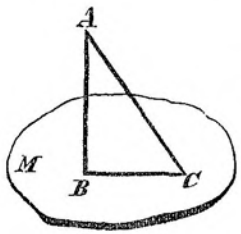


Черт. 235.

ляръ BD, проведенный изъ точки B къ плоскости M, не проходитъ черезъ точку A, то мы изъ точки A можемъ провести прямую AC, параллельную къ прямой BD, и въ такомъ случаѣ (теорема 226) прямая AC перпендикулярна къ плоскости M. Такимъ образомъ изъ всякой точки, взятой внѣ плоскости, къ этой послѣдней можно провести перпендикуляръ. Что и требовалось доказать.

Теорема 229. Изъ точки A (черт. 236), взятой внѣ плоскости M, къ этой плоскости можно провести только одинъ перпендикуляръ.

Доказательство. Для доказательства этого предположимъ, что изъ точки A къ плоскости M проведенъ перпендикуляръ AB и что изъ той же точки къ той же плоскости проведенъ еще одинъ перпендикуляръ AC, причемъ точки B и C суть точки пересѣченія плоскости M съ прямыми AB и AC. Тогда проведемъ плоскость черезъ линіи BA и CA; эта плоскость должна пересѣчь плоскость M въ прямой BC (теорема 203). Но въ такомъ случаѣ прямыя AB и AC обѣ перпендикулярны *къ прямой* BC; чего быть не можетъ. Стало-быть, изъ точки, взятой внѣ плоскости, къ этой плоскости можно провести только одинъ перпендикуляръ. Что и требовалось доказать.



Черт. 236.

Опредѣленія. Если перпендикуляръ къ плоскости проведенъ изъ точки, взятой на этой плоскости, то говорятъ, что перпендикуляръ *возставленъ* къ данной плоскости; если же перпендикуляръ къ плоскости проведенъ изъ точки, взятой внѣ ея, то говорятъ, что онъ *опущенъ* на плоскость. Основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки на данную плоскость, называется *проэкціею этой точки* на данную плоскость, а также *основаніемъ* или *подножіемъ перпендикуляра*. Прямая, соединяющая основаніе двухъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ крайнихъ точекъ какой нибудь конечной прямой, лежащей внѣ данной плоскости, называется *проэкціею* этой конечной прямой. За проэкцію точки, лежащей въ данной плоскости, на ту же плоскость принимаютъ точку, совпадающую съ данною. Если дана конечная прямая, то проэкціею этой прямой называется прямая, соединяющая проэкціи крайнихъ точекъ прямой, какъ бы эти крайнія точки ни лежали. *Наклонною* къ данной плоскости называется всякая не перпендикулярная къ данной плоскости конечная прямая, соединяющая точку, лежащую внѣ плоскости съ точкою, лежащею на этой плоскости.

Теорема 230. Если изъ точки, взятой внѣ плоскости, опустить на эту плоскость перпендикуляръ и наклонную, та длина перпендикуляра меньше длины наклонной.

Доказательство предоставляется учащемуся.

Замѣчаніе. Перпендикуляръ, опущенный изъ точки, взятой внѣ плоскости, на эту плоскость, есть такимъ образомъ кратчайшее разстояніе между этою точкою и плоскостью.

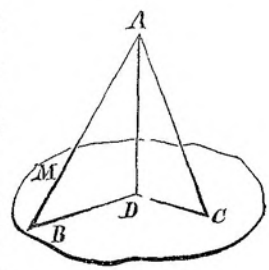
Теорема 231. Если изъ точки A, взятой внѣ плоскости M, проведены перпендикуляръ AD и двѣ наклонныя AB и AC и если проэкціи этихъ наклонныхъ равны между собою, то и самыя наклонныя тоже между собою равны.

Доказательство. Для доказательства этого (выполненіе чертежа предоставляется учащемуся) проведемъ черезъ точки A, B и D одну плоскость, а чрезъ точки A, C и D — другую; тогда получимъ два прямоугольныхъ треугольника ABD и ACD, которые равны между собою (слѣдствіе 1-ое теоремы 51), и въ нихъ гипотенузы AB и AC тоже между собою равны. Что и требовалось доказать.

Теорема 232 (обратная теоремѣ 231). Если двѣ наклонныя AB и AC къ одной и той же плоскости, проведенныя изъ одной и той же точки A, взятой внѣ плоскости, равны между собою, то и проэкціи этихъ наклонныхъ на ту же плоскость тоже между собою равны.

Доказательство. Для доказательства этого (выполненіе чертежа предоставляется учащемуся) проведемъ чрезъ точки A, B и D одну плоскость, а чрезъ точки A, C и D—другую; тогда треугольники ABD и ACD между собою равны (теорема 66); а въ такомъ случаѣ и прямыя BD и CD, т. е. проэкціи наклонныхъ AB и AC, между собою тоже равны. Что и требовалось доказать.

Теорема 233. Если (черт. 237) изъ точки A, взятой внѣ данной плоскости M, проведены двѣ наклонныя AB и AC и если проэкціи BD и CD этихъ наклонныхъ между собою не равны, то и самыя наклонныя между собою не равны, притомъ бо́льшей проэкціи соотвѣтствуетъ бо́льшая наклонная.



Черт. 237.

Доказательство. Для доказательства этого проведемъ чрезъ точки A, B и D одну плоскость, а чрезъ точки A, C и D другую, и примемъ во вниманіе, что, на основаніи Пиѳагоровой теоремы,

$$AB^2 = BD^2 + AD^2, \text{ а } AC^2 = CD^2 + AD^2;$$

но, по условію $BD \gtrless CD$, а потому (аксіома. 9)

$$BD^2 + AD^2 \gtrless CD^2 + AD^2, \text{ или } AB^2 \gtrless AC^2, \text{ т. е } AB \gtrless AC.$$

Что и требовалось доказать.

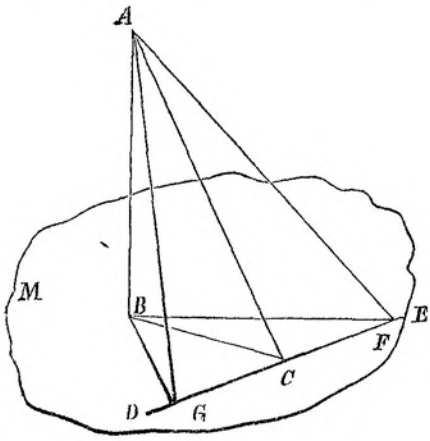
Теорема 234 (обратная теоремѣ 233). Если двѣ наклонныя, проведенныя изъ точки, взятой внѣ прямой, не равны между собою, то проэкція большей наклонной больше проэкціи меньшей.

Доказательство этой теоремы предоставляется учащемуся; оно можетъ быть поведено либо способомъ отъ противоположнаго, либо же съ помощью Пиѳагоровой теоремы.

Замѣчаніе. Учащимся предлагается доказать теорему 233 независимо отъ Пиѳагоровой.

Теорема 235. Если (черт. 238) изъ точки A, взятой внѣ плоскости M, на эту плоскость опустить перпендикуляръ AB и нѣкоторую наклонную AC, если въ той же плоскости провести прямую DE, перпендикулярную къ проэкціи BC данной наклонной AC, то эта прямая DE перпендикулярна также къ самой наклонной AC.

Доказательство. Для доказательства этого отъ точки C прямой DE отложимъ равные между собою отрѣзки CF и CG, соединимъ точку A съ точками G и F и проведемъ плоскости чрезъ точки: A, B и G; A, B и C; A, B и F и чрезъ точки A, G и F. Прежде всего разсмотримъ $\triangle$ FBG. Это треугольникъ равнобедренный (слѣдствіе 2-ое теоремы 51), и въ немъ сторона BG = BF, а потому наклонныя AG и AF между собою равны (теорема 231); вслѣдствіе этого $\triangle$ AFG есть тоже треугольникъ равнобедренный, и въ немъ (теорема 55) прямая AC перпендикулярна къ основанію GF, т. е. прямая DE перпендикулярна къ AC. Что и требовалось доказать.



Черт. 231.

Замѣчаніе. Эта теорема извѣстна подъ именемъ „теоремы трехъ перпендикуляровъ“.

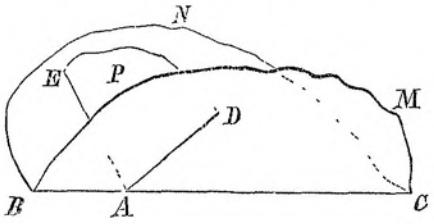
Теорема 236, (обратная теоремѣ 235). Если дана наклонная къ плоскости и если эта наклонная перпендикулярна къ нѣкоторой прямой, проведенной въ той же плоскости то и проэкція этой наклонной перпендикулярна къ той же прямой.

Доказательство ведется такъ же, какъ доказательство теоремы 235 и предоставляется учащемуся.

Замѣчаніе. Теоремы 235 и 236 часто выражаются въ слѣдующей болѣе удобной формѣ: проэкція прямого угла на данную плоскость, если одна изъ сторонъ этого угла совпадаетъ съ этою плоскостью, есть уголъ прямой, и обратно: если сторона даннаго угла совпадаетъ съ данною плоскостью и проэкція этого угла на эту плоскость есть уголъ прямой, то данный уголъ есть тоже уголъ прямой.—При этомъ проэкціею угла на плоскость называютъ уголъ, стороны котораго суть проэкціи сторонъ даннаго угла на данную плоскость.

Теорема 237. Чрезъ точку A, взятую на данной прямой BC, можно провести плоскость, перпендикулярную къ этой прямой.

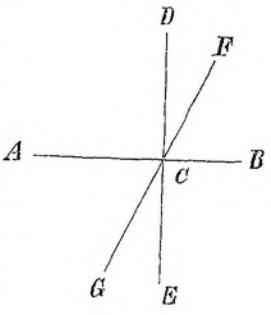
Доказательство. Для доказательства этого (черт. 239) проведемъ черезъ прямую BC какую нибудь плоскость M и изъ точки A въ этой плоскости перпендикуляръ AD къ прямой BC; затѣмъ чрезъ прямую BC проведемъ другую плоскость N и въ этой послѣдней плоскости прямую AE, перпендикулярную къ той-же прямой BC. Плоскость, проведенная черезъ прямыя AD и AE, перпендикулярна къ прямой BC (теорема 220); стало-быть, изъ точки, взятой на данной прямой, къ этой прямой можно провести перпендикулярную къ ней плоскость. Что и требовалось доказать.



Черт. 239.

Теорема 238. Изъ точки A, взятой на прямой BC, можно провести только одну перпендикулярную къ ней плоскость.

Доказательство. Для доказательства этого въ плоскости чертежа 240 возьмемъ произвольную прямую AB и на этой прямой произвольную точку C; пусть чрезъ эту послѣднюю точку проходитъ плоскость, перпендикулярная къ прямой AB, и пусть эта плоскость пересѣкаетъ плоскость чертежа въ прямой DE. Предположимъ далѣе, что чрезъ ту же точку C можно провести еще одну плоскость, перпендикулярную къ прямой AB, и пусть эта плоскость пересѣчетъ плоскость чертежа въ прямой FG. Тогда (теорема



Черт. 240.

220) прямая CD $\perp$ BC, и кромѣ того прямая CF $\perp$ BC. Чего быть не можетъ (теорема 7). Стало быть, изъ точки, взятой на прямой линіи, къ этой линіи можно провести только одну перпендикулярную плоскость. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. *Учащемуся предоставляется убѣдиться въ томъ,* что плоскость, перпендикулярная къ данной прямой въ данной точкѣ ея, есть геометрическое мѣсто всѣхъ прямыхъ, перпендикулярныхъ къ данной прямой въ данной точкѣ.

Теорема 239. Изъ точки, взятой внѣ прямой, можно провести перпендикулярную къ этой прямой плоскость.

Доказательство предоставляется учащемуся.

Теорема 240. Изъ точки A (выполненіе чертежа предоставляется учащемуся), взятой внѣ прямой BC, къ этой прямой можно провести только одну перпендикулярную плоскость.

Доказательство. Для доказательства этого представимъ себѣ въ плоскости чертежа прямую AB и въ той же плоскости точку C, лежащую внѣ этой прямой; пусть, кромѣ того, чрезъ точку C проведена плоскость, перпендикулярная къ прямой AB, и пусть эта плоскость пересѣкаетъ плоскость чертежа въ прямой CD. Далѣе предположимъ, что черезъ ту же точку C возможно провести еще одну плоскость, перпендикулярную къ прямой AB, и пусть эта плоскость пересѣчетъ плоскость чертежа въ прямой CE. Тогда и прямая CD, и прямая CE перпендикулярны къ прямой AB, чего быть не можетъ (теорема 33). Стало-быть, изъ точки, взятой внѣ прямой, къ этой прямой можно провести только одну перпендикулярную плоскость. Что и требовалось доказать

Опредѣленіе. *Разстояніемъ точки отъ плоскости* называется длина перпендикуляра, опущеннаго изъ этой точки на данную плоскость.

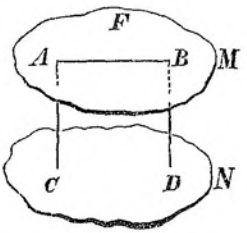
Теорема 241. Если (выполненіе чертежа предоставляется учащемуся) данная прямая AB параллельна данной плоскости M, то разстояніе всѣхъ точекъ прямой отъ плоскости равны между собою.

Доказательство. Для доказательства этого возьмемъ двѣ произвольныя точки C и D прямой AB, опустимъ изъ нихъ перпендикуляры CE и DF на плоскость M и примемъ во вниманіе, что CE $\parallel$ DF (теорема 227), а потому (теорема 68) CE $=$ DF. Что и требовалось доказать.

Опредѣленіе. *Разстояніемъ прямой отъ параллельной ей плоскости* называется длина перпендикуляра, опущеннаго изъ какой нибудь точки этой прямой на эту плоскость.

Теорема 242. Если (черт. 241) даны двѣ параллельныя плоскости M и N, то разстоянія всѣхъ точекъ одной изъ нихъ отъ другой равны между собою.

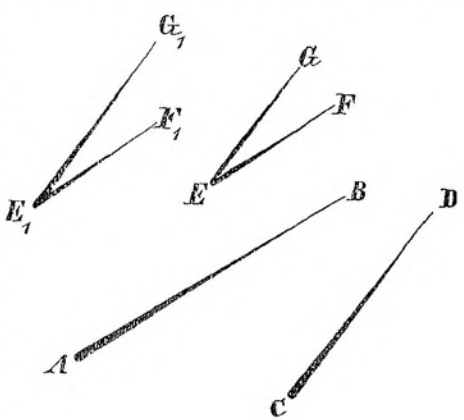
Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что всѣ точки прямой AB, соединяющей точки A и B въ плоскости M, находятся на одинаковомъ разстояніи отъ плоскости N; стало-быть, если AC и BD порознь перпендикулярны къ плоскости N, то AC=BD (теорема 217). Точно такъ же убѣдимся, что всякая третья точка F находится въ томъ-же разстояніи отъ плоскости N. Что и требовалось доказать.



Черт. 241.

§ 5. Объ углѣ двухъ прямыхъ и прямой съ плоскостью.

Теорема 243. Если (черт. 242) даны какія-нибудь двѣ прямыя AB и CD въ пространствѣ, имѣющія опредѣленныя направленія, если взять какую-нибудь точку E, лежащую внѣ этихъ прямыхъ, и провести изъ нея двѣ прямыя, порознь параллельныя даннымъ прямымъ и имѣющія тѣ же направленія, то величина угла, образованнаго этими послѣдними прямыми, не зависитъ отъ мѣста, занимаемаго точкою E въ пространствѣ, т. е. представляетъ для данныхъ двухъ прямыхъ AB и CD величину постоянную.



Черт 242.

Доказательство. Для доказательства этого возьмемъ еще какую-нибудь произвольную точку E_1 и проведемъ изъ нея прямую E_1F_1 параллельную къ AB и имѣющую съ нею одно и то же направленіе, и прямую E_1G_1 параллельную къ CD и имѣющую съ этою послѣднею одно и то же направленіе. Тогда (теорема 208) $E_1F_1 \parallel EF$, а $E_1G_1 \parallel EG$; а потому (теорема 212) $\angle F_1E_1G_1 = \angle FEG$. Что и требовалось доказать.

Опредѣленіе. *Уголъ двухъ прямыхъ линій* называется уголъ, образованный двумя прямыми, параллельными къ даннымъ

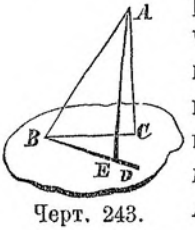
прямымъ и имѣющими тѣ же направленія.—Когда направленія данныхъ двухъ прямыхъ не извѣстны, то говорятъ, что эти послѣднія образуютъ четыре угла.

Замѣчаніе 1-е. Если данныя двѣ прямыя лежатъ въ одной плоскости, то приложеніе выше даннаго опредѣленія къ этому частному случаю не приводитъ ни къ какимъ несообразностямъ; если данныя двѣ прямыя параллельны и имѣютъ одно и то же направленіе, то условились принимать, что онѣ образуютъ, согласно опредѣленію, уголъ равный нулю; въ случаѣ же, когда данныя двѣ параллельныя прямыя имѣютъ прямо противоположныя направленія, онѣ образуютъ уголъ равный выпрямленному.—Такимъ образомъ данное выше опредѣленіе угла, образованнаго двумя прямыми, остается справедливымъ для всякихъ двухъ прямыхъ, каково бы ни было ихъ положеніе и направленіе въ пространствѣ.

Замѣчаніе 2-е. Благодаря обобщенному такимъ образомъ понятію угла, образованнаго двумя прямыми, нѣкоторыя теоремы (220, 224, 235) могутъ быть значительно проще формулированы. Для того чтобы дать представленіе о формулировкѣ этихъ теоремъ, замѣтимъ, что теорема 220 можетъ быть формулирована также и слѣдующимъ образомъ: если прямая перпендикулярна къ двумъ *какимъ угодно* прямымъ, проведеннымъ на данной плоскости подъ угломъ, отличающимся отъ нуля и отъ выпрямленнаго, то она перпендикулярна ко всякой прямой, проведенной въ той же плоскости.

Теорема 244. Если (черт. 243) данная прямая AB наклонна къ данной плоскости M, то уголъ ABC, образованный этою прямою со своей проэкціею на данную плоскость, меньше угла, образованнаго тою-же прямою съ любою прямою, не параллельною къ этой проэкціи.

Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что ABC есть уголъ непремѣнно острый и что изъ нашихъ разсужденій такимъ образомъ должны быть исключены всѣ случаи, когда уголъ, образованный прямою AB и какою нибудь прямою, взятою въ плоскости M, есть уголъ тупой или прямой; тогда намъ достаточно разсмотрѣть случай, когда прямая BD проходитъ чрезъ основаніе B наклонной AB, притомъ такъ, что $\angle ABD$ тоже уголъ острый. Предположимъ, что $\angle ABD = \angle ABC$; отложимъ на прямой BD отрѣзокъ BE равный проэкціи BC и соединимъ точку A съ точкою E. Тогда получимъ два треугольника



Черт. 243.

BAC и BAE, въ которыхъ (теорема 54) $\angle ABC < \angle ABE$. Что и требовалось доказать.

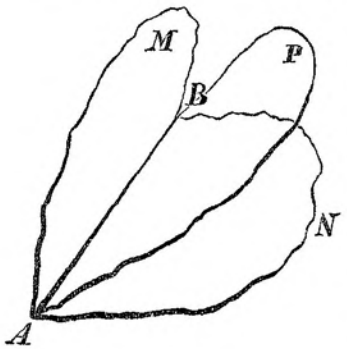
Опредѣленіе. *Угломъ прямой съ наклонною къ ней плоскостью* называется уголъ, образованный этою прямою съ ея проэкціею на данную плоскость.

Замѣчаніе. Когда данная прямая перпендикулярна къ данной плоскости, тогда это опредѣленіе угла прямой съ плоскостью неприложимо; несмотря на то, въ этомъ случаѣ говорятъ, что прямая образуетъ съ плоскостью прямой уголъ (почему?).

§ 5. О двугранныхъ или плоскостныхъ углахъ.

Опредѣленія. Двѣ безконечныя пересѣкающіяся плоскости раздѣляютъ пространство на четыре части. При этомъ получается четыре *двугранныхъ* или *плоскостныхъ угла*. Понятіе объ углѣ, образованномъ двумя плоскостями, проходящими чрезъ одну и ту же прямую, принадлежитъ къ числу понятій первоначальныхъ, основныхъ, не подлежащихъ опредѣленію. Плоскости, образующія двугранный уголъ, называются *сторонами двуграннаго угла*, линія же пересѣченія этихъ плоскостей *ребромъ* или *вершиною двуграннаго угла*. Двугранный уголъ обозначается на письмѣ, чаще всего, съ помощью двухъ буквъ, обозначающихъ его ребро; если-же данное ребро принадлежитъ нѣсколькимъ двуграннымъ угламъ, то двугранный уголъ обозначается четырьмя буквами, изъ которыхъ двѣ среднія обозначаютъ ребро даннаго двуграннаго угла, а крайнія—двѣ точки, лежащія на сторонахъ угла. Двугранные углы называются *равными*, если они могутъ быть помѣщены одинъ въ другой такъ, чтобы ребра ихъ и стороны совмѣстились; *смежными* называются двугранные углы, у которыхъ общая вершина, одна общая сторона, а прочія двѣ стороны лежатъ по разныя стороны вершины и составляютъ одну плоскость; *вертикальными* называются двугранные углы, въ которыхъ стороны одного угла составляютъ продолженія сторонъ другого. Двугранный уголъ разсматриваютъ вообще какъ нѣкоторую величину, т. е. двугранные углы можно складывать, одинъ уголъ можно вычесть изъ другого, двугранный уголъ можно умножить на любое число, и т. д. Плоскость, дѣлящая данный двугранный уголъ пополамъ, называется *равнодѣлящею* этого угла. Одинъ двугранный уголъ считается *больше* другого, когда онъ равенъ суммѣ этого второго угла съ какимъ-нибудь третьимъ двуграннымъ угломъ.

Теорема 245. Если (черт. 244) данъ двугранный уголъ MABN, то существуетъ только одна плоскость PABN, дѣлящая этотъ уголъ пополамъ.



Черт. 244.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3-й и предоставляется учащемуся.

Теорема 246. Всѣ выпрямленные двугранные углы равны между собою.

Доказательство этой теоремы ведется на основаніи теоремы 2-й, аналогично доказательству теоремы 4-й, и предоставляется учащемуся.

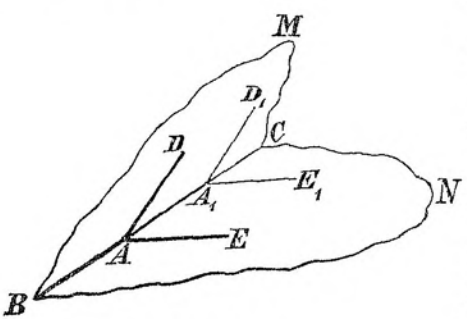
Опредѣленіе. Половина выпрямленнаго двуграннаго угла называется *прямымъ двуграннымъ угломъ*.

Теорема 247. Всѣ прямые двугранные углы равны между собою.

Теорема 248. Сумма двухъ смежныхъ двугранныхъ угловъ равна суммѣ двухъ прямыхъ двугранныхъ угловъ.

Доказательство теоремъ 247 и 248 подобно доказательству теоремъ 5-й и 8-й.

Замѣчаніе. Учащемуся предлагается, въ качествѣ полезнаго упражненія, прослѣдить—какія допущенія теоремы о прямолинейныхъ углахъ (Планиметрія, §§ 3 и 4) могутъ быть распространены на углы двугранные.



Черт. 245.

Теорема 249. Если (черт. 245) изъ точки A, взятой на ребрѣ BC даннаго двуграннаго угла MBCN возставить по перпендикуляру въ каждой изъ плоскостей, его образующихъ, то линейный уголъ DAE, образованный этими перпендикулярами, не зависитъ отъ того, гдѣ взята точка A, т. е. представляетъ собою величину постоянную для даннаго двуграннаго угла.

Доказательство. Для доказательства этого возьмемъ на ребрѣ двуграннаго угла какую нибудь другую, вполнѣ произвольную, точку A_1 и проведемъ въ плоскостяхъ M и N перпендикуляры A_1D_1 и A_1E_1 къ прямой BC. Тогда (теорема 14) $AD \parallel A_1D_1$, а

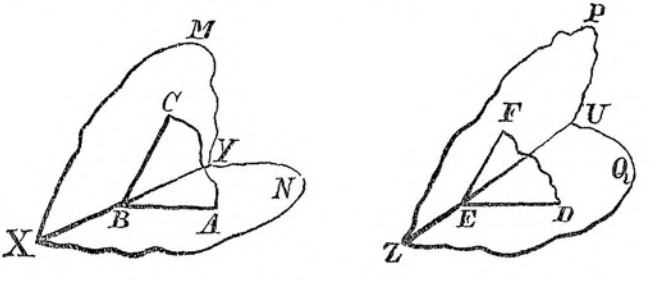
$AE \parallel A_1E_1$; въ такомъ случаѣ (теорема 213) $\angle DAE = \angle D_1A_1E_1$, т. е. величина угла DAE не зависитъ отъ того, съ какою точкою ребра совпадаетъ точка A и, поэтому, представляетъ собою, для даннаго двуграннаго угла, величину постоянную. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Теорема 248 можетъ быть формулирована также слѣдующимъ образомъ: уголъ, образованный линіями пересѣченія граней двуграннаго угла съ плоскостью, перпендикулярною къ ребру этого послѣдняго, есть величина постоянная.

Опредѣленіе. Если изъ какой либо точки ребра двуграннаго угла провести перпендикуляры къ этому ребру, лежащіе въ граняхъ этого угла, то уголъ, образованный этими перпендикулярами другъ съ другомъ, называется *линѣйнымъ угломъ* даннаго двуграннаго угла.

Теорема 250. Если (черт. 246) линейные углы ABC и DEF данныхъ двухъ двугранныхъ угловъ MXYN и PZUQ равны между собою, то и самые двугранные углы тоже между собою равны.

Доказательство. Для доказательства этого наложимъ двугранный уголъ XY на двугранный уголъ ZU такъ, чтобы точка



Черт. 246.

B совпала съ точкою E и линейный уголъ ABC совпалъ съ линейнымъ угломъ DEF. Тогда (теорема 5) прямая XY совпадетъ съ прямою ZU; а въ такомъ случаѣ (теорема 2) плоскость M совпадетъ съ плоскостью P, а плоскость N—съ плоскостью Q. Стало-быть, данные двугранные углы равны между собою. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Если линейный уголъ даннаго двуграннаго угла—уголъ прямой, то и двугранный уголъ—уголъ прямой.

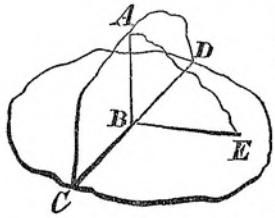
Теорема 251 (обратная теоремѣ 250). Если два двугранныхъ угла равны между собою, то и линейные углы ихъ тоже равны между собою.

Доказательство ведется наложеніемъ и предоставляется учащемуся.

Слѣдствіе. Если двугранный уголъ есть уголъ прямой, то и его линейный уголъ прямой.

Теорема 252. Если (черт. 247) данная плоскость N проходитъ черезъ прямую AB, перпендикулярную къ другой данной плоскости M, то эти двѣ плоскости одна съ другою образуютъ прямые двугранные углы.

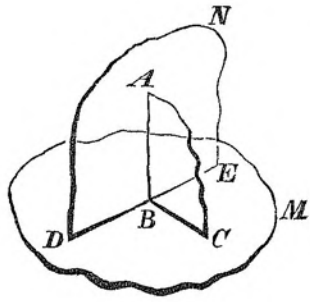
Доказательство. Для доказательства этого предположимъ, что прямая CD есть линія пересѣченія плоскостей M и N, и проведемъ въ плоскости M прямую BE, перпендикулярную къ прямой CD; кромѣ того, проведемъ чрезъ прямыя AB и BE плоскость. Тогда $\angle$ ABE есть линейный уголъ двуграннаго угла NCDM. Но, по условію, прямая AB перпендикулярна къ плоскости M, слѣдовательно она перпендикулярна и къ прямой BE. А потому (слѣдствіе теоремы 250) двугранный уголъ NCDM есть уголъ прямой. Что и требовалось доказать.



Черт. 247.

Теорема 253. Если (черт. 248) двѣ плоскости M и N взаимно-перпендикулярны, то прямая AB, проведенная въ одной изъ нихъ, напр. въ плоскости N, перпендикулярно къ линіи DE пересѣченія этихъ плоскостей, перпендикулярна и къ другой плоскости.

Доказательство. Для доказательства этого проведемъ въ плоскости M прямую BC, перпендикулярную къ прямой DE, а также плоскость чрезъ прямыя AB и BC; тогда $\angle$ ABC есть уголъ прямой (слѣдствіе теоремы 251). Стало-быть (теорема 220) прямая AB перпендикулярна и къ самой плоскости M. Что и требовалось доказать.



Черт. 248.

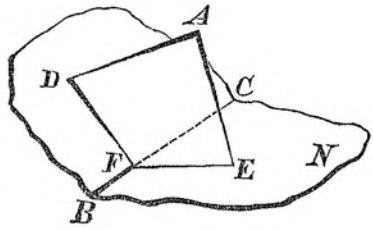
Слѣдствіе 1-е. Если прямая имѣетъ съ одною изъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей общую точку и если она въ то же время перпендикулярна къ другой плоскости, то она вся лежитъ въ первой плоскости.—Дѣйствительно: если-бы она не лежала въ первой плоскости, то изъ общей точки этой прямой и плоскости къ другой плоскости можно было-бы провести два перпендикуляра, чего быть не можетъ (теорема 230).

Слѣдствіе 2-е. Если двѣ пересѣкающіяся плоскости порознь перпендикулярны къ третьей, то линія пересѣченія первыхъ двухъ плоскостей тоже перпендикулярна къ этой плоскости. — Дѣйствительно: если мы изъ какой нибудь точки этой линіи пересѣченія опустимъ перпендикуляръ на третью плоскость, то этотъ

перпендикуляръ долженъ лежать въ одно время въ обѣихъ данныхъ плоскостяхъ (слѣдствіе 1-ое); стало-быть, онъ совпадаетъ съ линіею ихъ пересѣченія.

Теорема 254. Если (черт. 249) изъ точки A, взятой внутри двуграннаго угла DBCN, провести перпендикуляры AD и AE къ каждой изъ сторонъ его, то сумма двухъ угловъ: угла, образованнаго этими перпендикулярами другъ съ другомъ, и линейнаго угла даннаго двуграннаго угла, равна 2 d.

Доказательство. Для доказательства этого чрезъ стороны угла DAE проведемъ плоскость, которая пересѣчетъ плоскости M и N въ прямыхъ DF и FE. Въ такомъ случаѣ $\angle$ DFE равенъ линейному углу даннаго двуграннаго угла. Но (теорема 68) $\angle A + \angle E + \angle F + \angle D = 4$ d; слѣдовательно (аксіома 8) $\angle A + \angle F = 2$ d. Что и требовалось доказать.



Черт. 000.

Теорема 255. Двугранные углы относятся между собою, какъ ихъ линейные углы.

Доказательство этой теоремы предоставляется учащемуся, такъ какъ оно ведется аналогично доказательству теоремы 119.

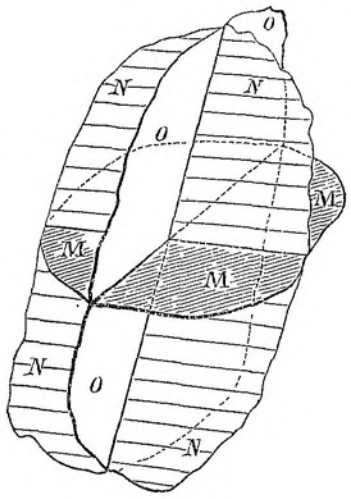
Замѣчаніе. Благодаря этой теоремѣ, величину двугранныхъ угловъ выражаютъ въ тѣхъ-же единицахъ мѣры, въ какихъ выражаютъ величину дугъ окружности и угловъ, т. е. въ градусахъ, минутахъ и секундахъ.

§ 6. О многогранныхъ углахъ.

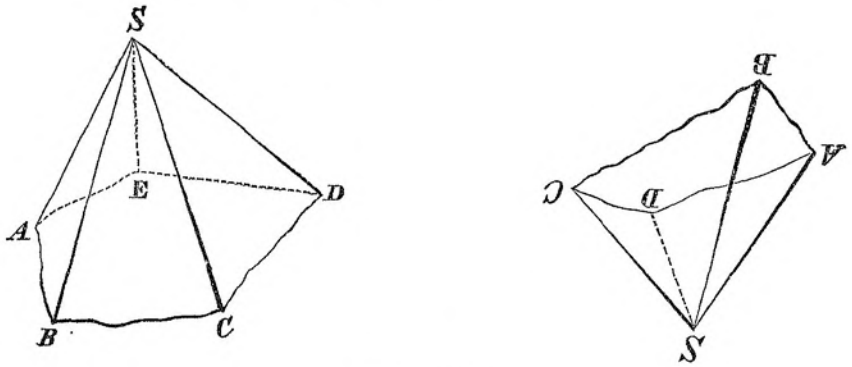
Опредѣленія. Три безконечныя плоскости, изъ которыхъ каждыя двѣ взаимно пересѣкаются, раздѣляютъ безконечное пространство на восемь частей, изъ которыхъ каждая даетъ намъ понятіе о *трехгранномъ углѣ*; общая точка линій пересѣченія трехъ данныхъ плоскостей называется *вершиною трехграннаго угла,* линія же пересѣченія каждой пары плоскостей называется *ребромъ трехграннаго угла;* прямолинейные углы, ограничивающіе данный трехгранный уголъ, называются *плоскими углами*, или *гранями*, или же *сторонами трехграннаго угла.* Такъ, черт. 250 даетъ представленіе о восьми трехгранныхъ углахъ, образованныхъ при взаимномъ пересѣченіи трехъ плоскостей M, N и O.

Если взять нѣсколько отдѣльныхъ прямолинейныхъ угловъ,

вторую сторону перваго изъ нихъ совмѣстить съ первою стороною второго угла такъ, чтобы вершины угловъ совпали, а плоскости ихъ образовали двугранный уголъ, отличающійся отъ нуля и отъ выпрямленнаго угла, если далѣе со второю стороною второго линейнаго угла подобнымъ же образомъ совмѣстить первую сторону третьяго линейнаго угла и т. д., до тѣхъ поръ, пока вторая сторона послѣдняго угла совмѣстится съ первою стороною перваго угла, то въ результатѣ получится *многогранный уголъ*. Каждый изъ прямолинейныхъ угловъ, его образующихъ, называется *плоскимъ угломъ* или *гранью*, или *стороною многограннаго угла*; каждая изъ прямыхъ, составляющихъ пересѣченіе двухъ смежныхъ граней, называется *ребромъ угла;* общая точка пересѣченія всѣхъ реберъ даннаго многограннаго угла, называется *вершиною угла*. Такъ, на черт. 251 изображены два многогранныхъ угла: одинъ о пяти и другой — о четырехъ граняхъ.



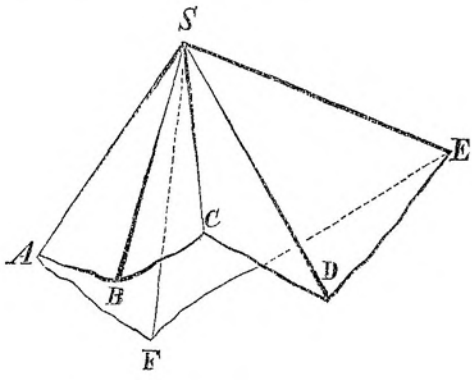
Черт. 250.



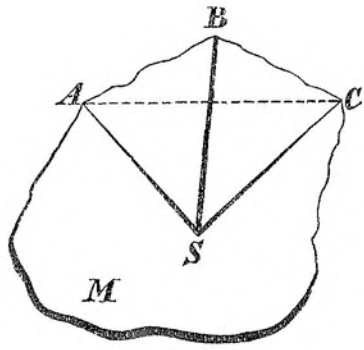
Черт. 251.

Если многогранный уголъ простирается только по одну сторону каждой изъ граней этого многограннаго угла, продолженной до безконечности во всѣхъ направленіяхъ, то такой многогранный уголъ называется *выпуклымъ*; въ противномъ случаѣ онъ называется *вогнутымъ многограннымъ угломъ* или *угломъ со входящими двугранными углами*. Такъ, черт. 252 изображаетъ шестигранный уголъ, принадлежащій къ послѣднему роду многогранныхъ угловъ,

а черт. 253 изображаетъ вогнутый трехгранный уголъ, котораго одна грань есть вогнутый уголъ ASMC, а остальныя грани ∠ASB и ∠BSC. Обозначаются многогранные углы либо одною буквою, стоящею у вершины, либо же нѣсколькими буквами (трехгранные— четырьмя, четырехгранные— пятью и т. д.), изъ которыхъ первая обозначаетъ вершину, а остальныя—точки на послѣдовательно взятыхъ ребрахъ угла.



Черт. 252.



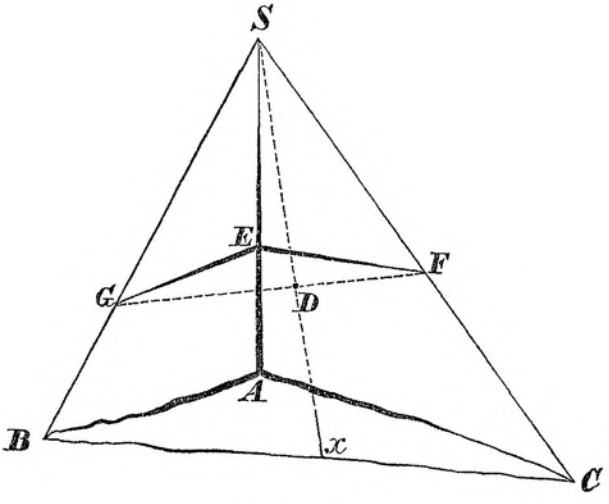
Черт. 253.

Замѣчаніе. Совокупность всѣхъ граней многограннаго или трехграннаго угла можно разсматривать какъ слѣдъ нѣкоторой прямой, проходящей чрезъ вершину угла и двигавшейся въ плоскости первой грани до тѣхъ поръ, пока была описана эта грань, затѣмъ продолжавшей двигаться въ плоскости второй грани, пока эта послѣдняя грань была ею описана и т. д. до тѣхъ поръ, пока прямая, наконецъ, приняла первоначальное свое положеніе, т. е. совпала съ первымъ ребромъ многограннаго угла.

Теорема 256. Въ выпукломъ трехгранномъ углѣ S (черт. 254) сумма каждыхъ двухъ плоскихъ угловъ его болѣе третьяго.

Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что если третій плоскій меньше одного изъ остальныхъ двухъ или равенъ ему, то теорема въ доказательствѣ не нуждается. А потому въ доказательствѣ нуждается только тотъ случай, когда третій уголъ больше каждаго изъ остальныхъ двухъ плоскихъ угловъ. Пусть ∠BSC больше каждаго изъ остальныхъ плоскихъ угловъ даннаго трехграннаго угла S. Тогда отложимъ на грани BSC уголъ BSX, равный углу BSA, и на прямыхъ SA и SX отъ точки S—равные между собою отрѣзки SE и SD; затѣмъ черезъ точки E и D и какую нибудь точку C ребра SB проведемъ плоскость, которая пересѣчетъ грани въ прямыхъ GE,EF

и GF. Разсмотримъ треугольники GSE и GSD, которые по построенію, равны между собою (теорема 51); отсюда получимъ,



Черт. 254.

что сторона GE = GD. Но (теорема 44) GE + EF > GF. Отнявъ отъ первой части этого неравенства GE, а отъ второй GD (аксіома 9), получимъ, что EF > DF. А потому ∠ ASF > ∠ DSF (теорема 51). Стало-быть (аксіома 9),

$$\angle \text{ASB} + \angle \text{ASC} > \angle \text{BSC}.$$

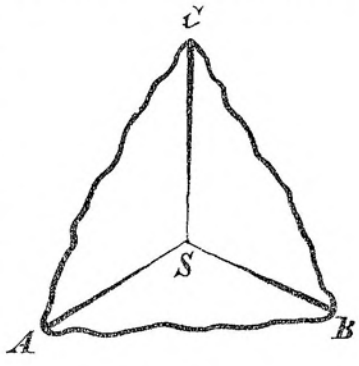
Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Каждый изъ плоскихъ угловъ многограннаго угла меньше суммы всѣхъ прочихъ угловъ даннаго многограннаго угла. Дѣйствительно: проведя плоскости, проходящія чрезъ одну изъ сторонъ даннаго плоскаго угла и черезъ всѣ остальныя ребра даннаго многограннаго угла, получимъ рядъ трехгранныхъ угловъ, изъ которыхъ учащемуся предоставляется вывести это слѣдствіе, пользуясь теоремой 256 и аксіомой 7-й.

Замѣчаніе. Учащемуся предлагается ранѣе изученія послѣдующихъ теоремъ пріобрѣсти навыкъ въ распознаваніи положенія въ пространствѣ изображенныхъ на черт. 259—262 трехгранныхъ угловъ. Черт. 260 изображаетъ уголъ, обращенный къ зрителю вершиною; черт. 262 изображаетъ уголъ, обращенный къ зрителю одною изъ своихъ граней, и т. д.

Теорема 257. Если (черт. 255) въ данномъ трехгранномъ углѣ S два двугранные угла CASB и CBSA прямые, то противолежащіе имъ плоскіе углы CSB и CSA тоже прямые.

Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что плоскости AC и BC перпендикулярны къ плоскости AB, а потому (слѣдствіе 2-ое теоремы 253) и линія пересѣченія ихъ перпендикулярна къ той-же плоскости AC; стало-быть, прямая CS перпендикулярна также и къ прямымъ SA и SB, а потому углы CSA и CSB прямые. Что и требовалось доказать.

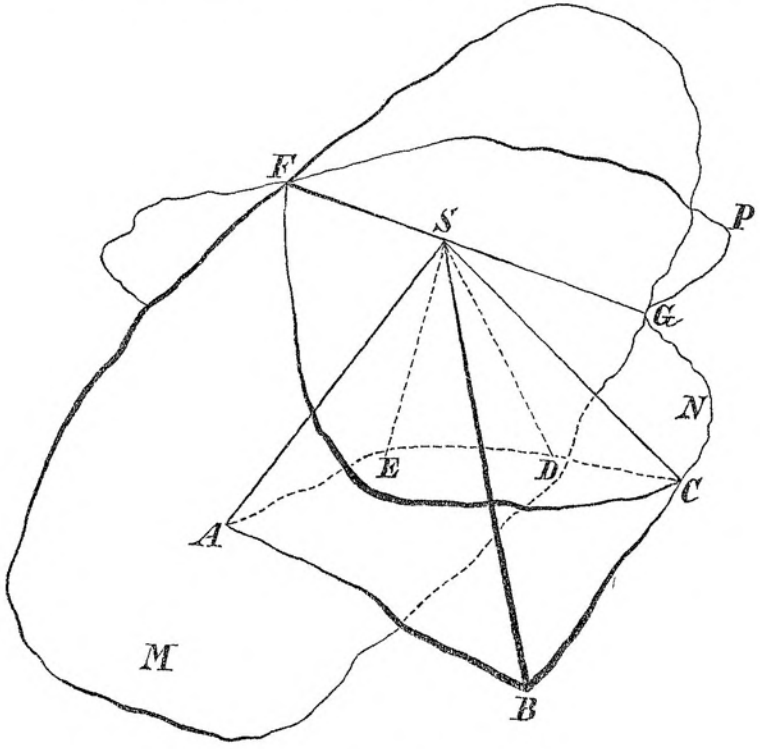


Черт. 255.

Теорема 258, (обратная теоремѣ 257). Если (черт. 255) два плоскихъ угла ASC и BSC даннаго трехграннаго угла S углы прямые, то и противолежащіе имъ двугранные углы тоже прямые.

Доказательство этой теоремы основано на теоремахъ 220 и 252 и предоставляется, въ качествѣ весьма полезнаго упражненія, учащемуся.

Лемма 19. Черезъ всякую точку (черт. 256), взятую

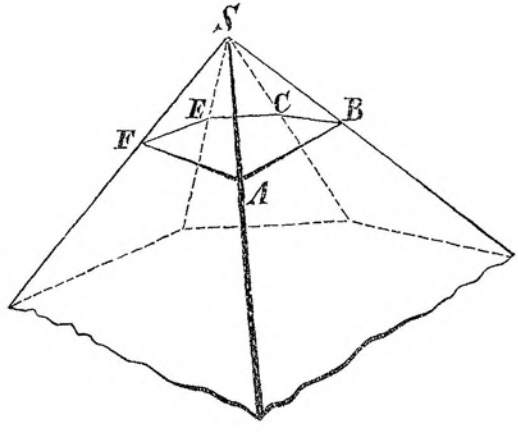


Черт. 256.

внутри выпуклаго многограннаго угла S можно провести безчисленное множество плоскостей, пересѣкающихъ всѣ ребра этого многограннаго угла.

Доказательство. Для доказательства этого приведемъ плоскость M чрезъ одну изъ граней ASE даннаго многограннаго угла, затѣмъ проведемъ на этой плоскости прямую FG чрезъ вершину S такъ, чтобы эта прямая проходила внѣ угла ASE; наконецъ, проведемъ плоскость N чрезъ прямую FG и чрезъ ребро SC, образующее съ плоскостью M уголъ большій, чѣмъ углы, образованные всѣми остальными ребрами съ тою же плоскостью M. Тогда многогранный уголъ лежитъ весь внутри двуграннаго угла NGFM. Проведемъ чрезъ прямую FG какую-нибудь плоскость P, лежащую въ двугранномъ углѣ, смежномъ углу MFGN; а затѣмъ проведемъ чрезъ любую точку, лежащую внутри даннаго многограннаго угла S, плоскость параллельную плоскости P; тогда получимъ нѣкоторую плоскость, пересѣкающую всѣ ребра многограннаго угла S (слѣдствіе 3 теоремы 214). Но такихъ плоскостей, какъ плоскость P, можетъ быть проведено чрезъ прямую FG безчисленное множество; кромѣ того, и такихъ прямыхъ, какъ прямая FG, тоже можно провести безчисленное множество. Стало-быть, чрезъ точку, взятую внутри выпуклаго многограннаго угла, можно провести безчисленное множество плоскостей, пересѣкающихъ всѣ ребра даннаго многограннаго угла. Что и требовалось доказать.

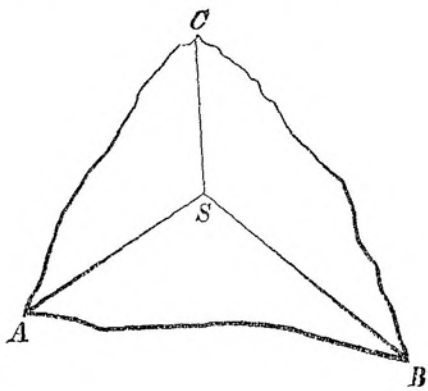
Теорема 259. Во всякомъ выпукломъ многогранномъ углѣ S сумма плоскихъ угловъ его менѣе, чѣмъ 4 d.



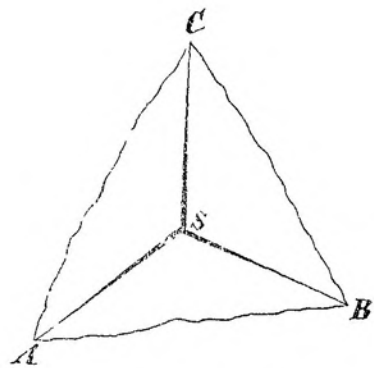
Черт. 257.

Доказательство. Для доказательства этого проведемъ чрезъ какую нибудь точку, взятую внутри даннаго угла, плоскость, пере-

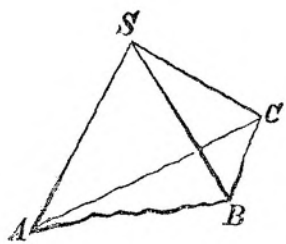
сѣкающую всѣ ребра даннаго многограннаго угла въ нѣкоторыхъ точкахъ A,B,C,E,F, а стороны даннаго угла въ прямыхъ: AB,BC, CE,EF и FA. Тогда получимъ выпуклый (почему?) многоугольникъ ABCEF. Углы этого многоугольника станемъ обозначать буквами A,B,C,E,F, число граней угла S обозначимъ буквою n, а прилежащіе къ каждому изъ этихъ угловъ плоскіе углы трехгранныхъ угловъ A,B,C,E и F обозначимъ соотвѣтственно буквами: a_1 и a_2, b_1 и b_2, c_1 и c_2, e_1 и e_2, f_1 и f_2 выпуклыхъ сумму



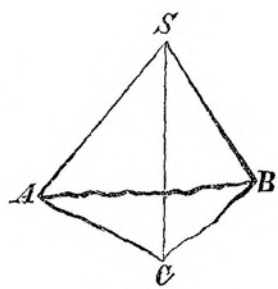
Черт. 259.



Черт. 260.



Черт. 261.



Черт. 262.

плоскихъ угловъ при вершинѣ обозначимъ буквою S, сумму угловъ многоугольника ABCEF буквою s, а сумму прилежащихъ къ нему плоскихъ угловъ a_1, a_2 и т. д.—буквою σ. Тогда (теорема 254)

$$a_1 + a_2 > A,\ b_1 + b_2 > B \text{ и т. д., откуда}$$

$$\sigma > s;$$

но $S + \sigma = 2\,dn$ (теорема 45); отсюда

$$\sigma = 2\,d.\ n\text{—S};$$

съ другой стороны (теорема 68)

$$s = 2dn - 4d.$$

Такимъ образомъ (аксіома 5-я)

$$2\,dn - S > 2\,dn - 4d, \quad \text{откуда} \quad S < 4\,d.$$

Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе 1-е. Изъ теоремъ 256 и 259 слѣдуетъ, что для того, чтобы данные прямолинейные углы могли быть плоскими углами выпуклаго многограннаго угла, необходимо и достаточно, чтобы каждый уголъ былъ менѣе суммы остальныхъ и чтобы сумма всѣхъ угловъ была менѣе, чѣмъ $4d$.

Замѣчаніе 2-е. Учащемуся предоставляется, въ качествѣ упражненія, доказать, что сумма всѣхъ трехъ угловъ вогнутаго трехграннаго угла болѣе, чѣмъ $4d$, а сумма (см. черт. 253) выпуклыхъ плоскихъ угловъ его менѣе третьяго (вогнутаго угла).

§ 7. О многогранникахъ.

Опредѣленія. Геометрическое тѣло, ограниченное со всѣхъ сторонъ прямолинейными плоскими фигурами, называется *многогранникомъ*. Каждая изъ фигуръ, ограничивающихъ данный многогранникъ, называется *гранью* или *стороною многогранника*, стороны граней—*ребрами многогранника*, а вершины—*вершинами многогранника*.

Теорема 260. Если (выполненіе чертежа предоставляется учащемуся) чрезъ три точки A, B и C, изъ которыхъ каждая взята на ребрѣ выпуклаго трехграннаго угла S, но ни одна не совпадаетъ съ вершиною его, провести плоскость, то эта плоскость, вмѣстѣ съ гранями угла S, опредѣлитъ тѣло, ограниченное четырьмя гранями, изъ которыхъ каждая есть треугольникъ.

Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что проведенная чрезъ три точки A, B и C плоскость пересѣчетъ каждую изъ сторонъ трехграннаго угла въ прямой линіи (слѣдствіе теоремы 203); эти три линіи пересѣченія образуютъ треугольникъ, который вмѣстѣ съ остальными тремя треугольниками SAB, SAC и SBC ограничиваетъ нѣкоторое тѣло. Стало-быть, всѣхъ граней у этого тѣла четыре, и каждая изъ нихъ есть треугольникъ. Что и требовалось доказать.

Теорема 261. Если чрезъ точку, взятую внутри выпуклаго многограннаго угла, въ которомъ n граней, провести плоскость такъ, чтобы она пересѣкла каждое изъ реберъ многограннаго угла, то эта плоскость, вмѣстѣ съ гранями этого угла опредѣлитъ тѣло, ограниченное n треугольниками и однимъ многоугольникомъ.

Доказательство и выполненіе чертежа предоставляется учащемуся.

Опредѣленія. Тѣло, ограниченное треугольниками, имѣющими общую вершину, и нѣкоторымъ треугольникомъ или многоугольникомъ, противолежащимъ этой вершинѣ, называется *пирамидою*; если всѣ грани пирамиды суть треугольники, то она называется *треугольною пирамидою*; если же въ пирамидѣ одна изъ граней есть многоугольникъ, то она называется *четырехугольною*, *пятиугольною* и т. д. *пирамидою*, смотря по тому, сколько сторонъ въ этомъ многоугольникѣ. Четырехугольныя, пятиугольныя и другія пирамиды, у которыхъ одна изъ граней есть многоугольникъ, носятъ общее названіе *многоугольныхъ пирамидъ*.

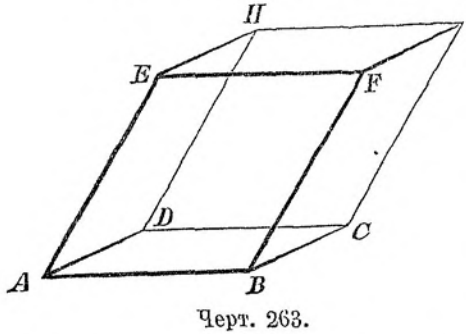
Теорема 262. Если изъ вершинъ многоугольника провести, подъ какимъ нибудь угломъ къ плоскости его, параллельныя другъ другу прямыя, а чрезъ каждыя двѣ, послѣдовательно взятыя, прямыя провести часть плоскости, заключенную между ними, и если, наконецъ, провести плоскость, параллельную къ плоскости даннаго многоугольника, то получится тѣло, ограниченное столькими параллелограммами, сколько сторонъ въ данномъ многоугольникѣ, и двумя равными другъ другу многоугольниками съ порознь параллельными сторонами.

Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что (теорема 217) каждая изъ четыреугольныхъ граней есть параллелограммъ и что такихъ параллелограммовъ столько, сколько сторонъ въ данномъ многоугольникѣ; кромѣ того, двѣ грани суть многоугольники, у которыхъ стороны порознь параллельны (теорема 214) и равны между собою (теорема 70); углы же, заключенные между порознь равными сторонами этихъ многоугольниковъ, тоже равны (теорема 213). Стало-быть, грани этого многогранника суть параллелограммы и два равныхъ между собою многоугольника. Что и требовалось доказать.

Опредѣленія. Многогранникъ, котораго двѣ грани представляютъ собою равные между собою и параллельные другъ другу многоугольники, а остальныя грани суть параллелограммы, называется *призмою*; при этомъ равные и параллельные между собою многоугольники называются *основаніями* призмы; стороны параллелограммовъ, не принадлежащія основаніямъ призмы, называются *ребрами призмы*. Смотря по числу сторонъ своего основанія, призма называется треугольною, четыреугольною, пятиугольною и т. д. Четыреугольныя, пятиугольныя и другія призмы, основаніе которыхъ суть многоугольники, носятъ общее названіе *многоугольныхъ* призмъ. Плоскость, проходящая черезъ два ребра

призмы и не совпадающая ни съ одною изъ граней призмы, называется *діагональною плоскостью* призмы. Если ребра призмы не перпендикулярны къ основанію ея, то она называется *наклонною призмою*; если-же ребра призмы перпендикулярны къ основанію ея, то она называется *прямою призмою*.—Прямая призма, которой основаніе есть правильный многоугольникъ, называется *правильною призмою*. Прямая линія, соединяющая центры основаній правильной призмы, называется *осью* или высотою *призмы*. Если какая-нибудь призма пересѣчена такою плоскостью, не параллельною ея основанію, которая пересѣкаетъ всѣ ребра ея, то эта призма раздѣляется на двѣ части, изъ которыхъ каждая называется *усѣченною призмою*.—Четыреугольная призма, которой основанія суть параллелограммы, называется *параллелепипедомъ*. Параллелепипедъ, въ которомъ ребра не перпендикулярны къ основанію, называется *наклоннымъ параллелепипедомъ;* параллелепипедъ, въ которомъ ребра перпендикулярны къ основанію, называется *прямымъ параллелепипедомъ*; прямой параллелепипедъ, котораго основанія суть прямоугольники, называется *прямоугольнымъ параллелепипедомъ*. Ребра прямоугольнаго параллелепипеда, выходящія изъ одной и той-же вершины называются *измѣреніями прямоугольнаго параллелепипеда*: одно ребро при этомъ принимается за длину параллелепипеда, другое—за высоту, а третье—за ширину его. *Прямоугольный параллелепипедъ, въ которомъ* всѣ три измѣренія равны между собою, называется *кубомъ* или *правильнымъ шестигранникомъ*, или же *эксаэдромъ*. Параллелепипедъ, въ которомъ всѣ грани суть ромбы, называется *ромбоэдромъ*. Прямая, соединяющая двѣ, не лежащія въ одной и той-же грани, вершины параллелепипеда, называется *діагональю* его.

Теорема 263. Во всякомъ параллелепипедѣ ABCDEFGH (черт. 263) противоположныя грани, напр. ABFE и DCGH, равны между собою и параллельны.



Черт. 263.

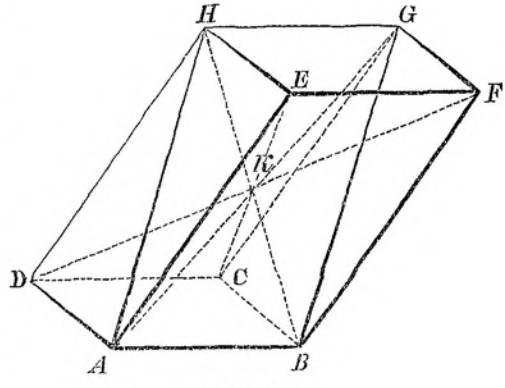
Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что AB = DC, а EF = HG (теорема 69); кромѣ того, AE = HD, а BF = CG (теорема 69); наконецъ, ∠ EAB = ∠ HDC (теорема 214); стало-быть, параллелограммы ABFE и DCGH совмѣстимы, т. е. равны между собою. Что они параллельны, вы-

текаетъ изъ теоремы 213.—Точно такъ же можно доказать, что и остальныя, противолежащія другъ другу, грани параллелепипеда равны между собою и взаимно параллельны. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Въ параллелепипедѣ каждыя двѣ, противолежащія одна другой, стороны могутъ быть приняты за основанія его.

Теорема 264. Въ параллелепипедѣ ABCDEFGH (черт. 264) всѣ діагонали его пересѣкаются въ одной и той-же точкѣ и въ этой точкѣ взаимно дѣлятся пополамъ.

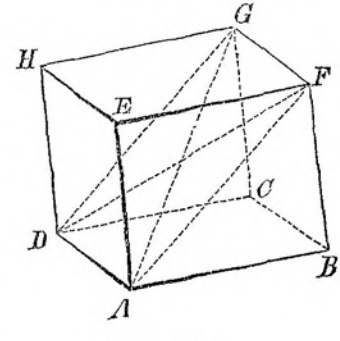
Доказательство. Для доказательства этого проведемъ прямыя HD и GB и примемъ во вниманіе, что прямая HG ⫲ AB (аксіома 6 и теорема 208); стало-быть, прямая HA ⫲ GB (лемма 3-я); а потому діагонали HB и GA параллелепипеда представляютъ собою въ то же время діагонали нѣкотораго параллелограмма ABGH. Но въ такомъ случаѣ (теорема 72) онѣ въ точкѣ O взаимно дѣлятся пополамъ. Точно такъ же докажемъ, что діагонали AG и DF того же параллелепипеда должны пересѣчься и притомъ раздѣлиться въ точкѣ пересѣченія пополамъ. Но такъ какъ точка O есть средина прямой AG, то прямыя AG и DF должны взаимно пересѣчься въ той же точкѣ O. Стало-быть, всѣ четыре діагонали параллелепипеда пересѣкаются въ одной точкѣ, и притомъ взаимно дѣлятся въ этой точкѣ пополамъ. Что требовалось доказать.



Черт. 264.

Теорема 265. Во всякомъ прямоугольномъ параллелепипедѣ ABCDEFGH (черт. 265) діагонали равны между собою.

Доказательство. Для доказательства этого проведемъ двѣ какія-нибудь діагонали AG и DF. Проведя черезъ нихъ плоскость, получимъ, что эта плоскость перпендикулярна къ плоскостямъ AF и DE (теорема 252), а потому GF ⫲ FA, и параллело-



Черт. 265.

граммъ ADGF есть прямоугольникъ. Стало-быть, AG = DF (теорема 74). Точно такъ же можно доказать, что всѣ четыре діагонали прямоугольнаго параллелепипеда равны между собою. Что и требовалось доказать.

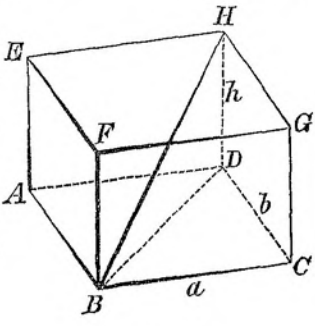
Теорема 266. Квадратъ діагонали прямоугольнаго параллелепипеда ABCDEFGH (черт. 266) равняется суммѣ квадратовъ трехъ его измѣреній a, b и h.

Доказательство. Для доказательства этого проведемъ черезъ діагональ BH и высоту h даннаго параллелепипеда плоскость; она перссѣчетъ плоскость ABCD въ нѣкоторой прямой BD. Такъ какъ HD перпендикулярна къ плоскости ABCD, то $\triangle$ HDB есть треугольникъ прямоугольный, въ которомъ (Пиѳагорова теорема)

$$BH^2 = BD^2 + h^2;$$

но $\triangle$ BCD тоже треугольникъ прямоугольный, а потому въ немъ (Пиѳагорова теорема)

$$BD^2 = a^2 + b^2.$$



Черт. 266.

Стало-быть (аксіома 5-я), $BH^2 = a^2 + b^2 + h^2$. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Квадратъ діагонали куба равняется утроенному квадрату одного изъ реберъ этого куба.

Опредѣленія. Вершина многограннаго угла многоугольной и вершина всякаго трехграннаго угла треугольной пирамиды называется *вершиною пирамиды*. Грань пирамиды, противолежащая вершинѣ ея, называется *основаніемъ пирамиды*. Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины пирамиды на основаніе ея, называется *высотою пирамиды*. Ребра многограннаго угла многоугольной пирамиды называются *ребрами пирамиды*. Если основаніе пирамиды есть правильный многоугольникъ, а вершина пирамиды лежитъ на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ центра основанія къ плоскости послѣдняго, то пирамида называется *правильною пирамидою*. Высота правильной пирамиды иногда называется также и *осью пирамиды*. Четырехгранная пирамида, которой всѣ грани суть равные между собою правильные треугольники, называется *правильнымъ тетраэдромъ*.—Плоскость, проходящая черезъ два ребра пирамиды и не совпадающая при этомъ ни съ одною изъ граней ея, называется *діагональною плоскостью пирамиды*. Въ отличіе отъ основанія пирамиды остальныя грани ея называются *боковыми гранями пирамиды*. Фигура, получаемая при пере-

сѣченіи призмы (или пирамиды) какою-нибудь плоскостью называется *сѣченіемъ призмы* (или пирамиды).

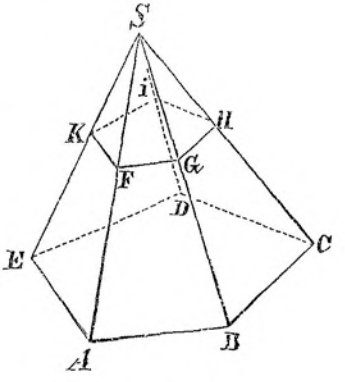
Теорема 267. Въ правильной пирамидѣ всѣ грани равны между собою.

Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе что всѣ ребра SA, SB, SC, SD и SE равны между собою, (теорема 231). Но, кромѣ того, и стороны AB,BC,CD,DE и EA этихъ тр—ковъ между собою равны, какъ стороны одного и того-же правильнаго многоугольника; стало-быть, всѣ грани SAB, SBC, SDC и т. д., равны между собою (теорема 50). Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Всѣ перпендикуляры, опущенные изъ вершины правильной пирамиды на стороны ея основанія, равны между собою.—Убѣдиться въ этомъ предоставляется учащемуся.

Опредѣленіе. Высота каждой изъ граней правильной пирамиды, т. е. перпендикуляръ, опущенный изъ вершины правильной пирамиды на любую изъ сторонъ ея основанія, называется *апоѳемою правильной пирамиды.*

Теорема 268. Если (черт. 267) черезъ какую-нибудь точку F одного изъ реберъ какой угодно пирамиды SABCDE провести плоскость, параллельную къ основанію пирамиды, то параллельное основанію сѣченіе FGHIK этой пирамиды есть многоугольникъ, подобный основанію данной пирамиды.



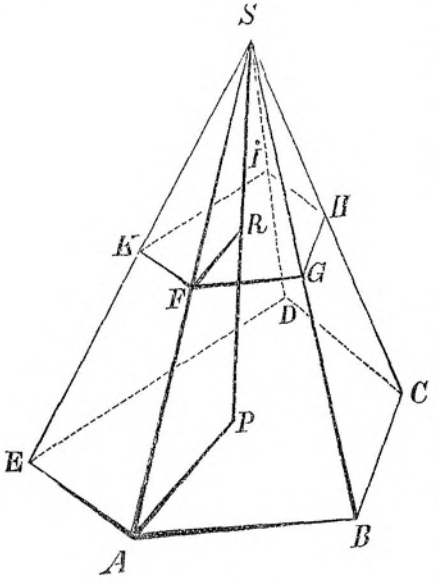
Черт. 267.

Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что углы F, G, H, I, K этого многоугольника порознь равны угламъ A,B,C,D,E основанія (теоремы 212) и что AB : FG = SB : SG = BC : GH = SC : SH = CD : HI и т. д., откуда AB : FG = BC : GH = CD : HI и т. д. Стало-быть, многоугольникъ FGHIK подобенъ многоугольнику ABCDE. Что требовалось доказать.

Слѣдствіе 1-е. Площадь основанія какой угодно пирамиды относится къ площади параллельнаго ему сѣченія ея, какъ квадратъ разстоянія основанія отъ вершины относится къ квадрату разстоянія сѣченія отъ той-же вершины.—Дѣйствительно: проведя высоту SP (черт. 268) данной пирамиды, допустивъ, что точка пересѣченія ея съ сѣченіемъ параллельнымъ основанію есть точка R и соединивъ точку R съ точкою F, а точку P съ точкою A,

получимъ треугольники SAP и SFR, которые другъ другу подобны (слѣдствіе 1-е теоремы 138) и въ которыхъ

$$SA : SF = SP : SR.$$

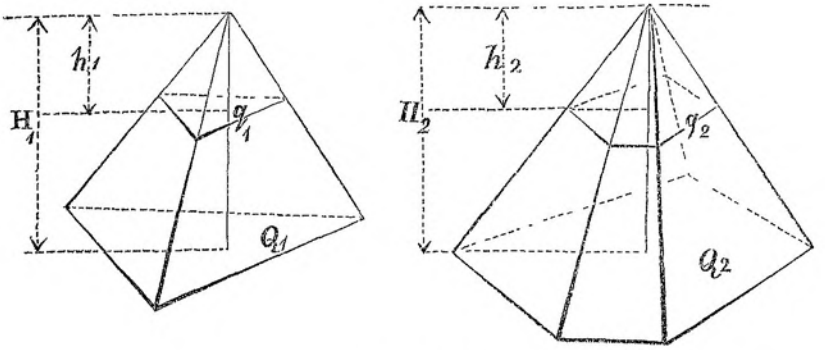


Черт. 268.

По (теорема 177) пл. ABCDE : пл. FGHIK $= AB^2 : FG^2$, а $AB^2 : FG^2 = SA^2 : SF^2 = SP^2 : SR^2$; слѣдовательно (аксіома 5)

пл. ABCDE : пл. FGHIK $= SP^2 : SR^2$.

Слѣдствіе 2-е. Если двѣ пирамиды имѣютъ равныя высоты и если въ обѣихъ пирамидахъ, на одинаковомъ разстояніи отъ вершины, проведены параллельныя основаніямъ сѣченія, то отношеніе площадей основаній равно отношенію площадей полученныхъ сѣченій. — Дѣйствительно: если обозначить площади основаній данныхъ пирамидъ буквами Q_1 и Q_2, площади сѣченій соотвѣтственно буквами q_1 q_2, высоты пирамидъ буквами H_1 и H_2, а разстоянія сѣченій отъ вершинъ буквами h_1 и h_2, то



Черт. 269.

$$\frac{Q_1}{q_1} = \frac{H_1^2}{h_1} \text{ а } \frac{Q_2}{q_2} = \frac{H_2^2}{h_2}$$

Но, по условію, $H_1 = H_2$, а $h_1 = h_2$; стало-быть,

$$\frac{Q_1}{q_1} = \frac{Q_2}{q_2} \text{ или } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{q_1}{q_2}.$$

Замѣчаніе. Кромѣ упомянутыхъ выше, правильныхъ четырехгранника (тетраэдра) и шестигранника (эксаэдра), существуютъ еще три выпуклыхъ правильныхъ многогранника: правильный восьмигранникъ (октаэдръ), ограниченный восемью равными между собою правильными треугольниками, сходящимися у каждой вершины по четыре, правильный двѣнадцатигранникъ (додекаэдръ), ограниченный двѣнадцатью, равными между собою, правильными пятиугольниками, сходящимися у каждой вершины по три, и правильный двадцатигранникъ (икосаэдръ), ограниченный двадцатью равными между собою правильными треугольниками, сходящимися у каждой вершины по пяти.

Теорема 269. Если въ двухъ треугольныхъ призмахъ или пирамидахъ основанія и двѣ грани порознь равны между собою, равно наклонены одна къ другой и одинаково расположены, то эти многогранники равны между собою.

Теорема 270. Если въ двухъ треугольныхъ призмахъ или пирамидахъ основанія и двѣ грани порознь равны между собою, равно наклонены одна къ другой и одинаково расположены, то эти многогранники равны между собою.

Доказательство ведется съ помощью наложенія и предоставляется учащемуся.

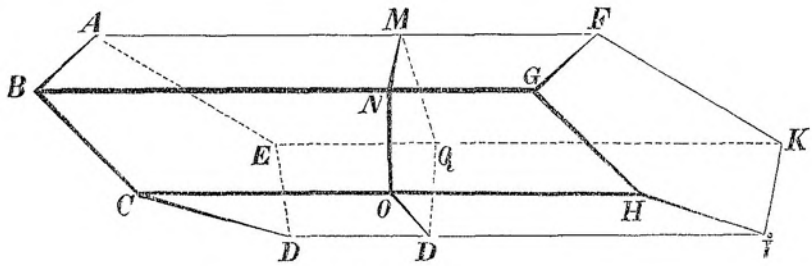
§ 9. Измѣреніе поверхностей и объемовъ нѣкоторыхъ многогранниковъ.

Опредѣленія. *Поверхностью многогранника* называется совокупность всѣхъ его граней, такъ какъ эта совокупность представляетъ собою границу даннаго тѣла, отдѣляющую его отъ остального пространства; кромѣ того, *поверхностью многогранника* называется сумма площадей всѣхъ граней этого многогранника. Въ пирамидахъ и призмахъ различаютъ поверхность полную и боковую: *полною поверхностью* пирамиды или призмы называется сумма площадей всѣхъ граней данной пирамиды или призмы; *боковою же поверхностью* пирамиды или призмы называется сумма площадей боковыхъ граней данной пирамиды или призмы. *Прямымъ сѣченіемъ* призмы называется сѣченіе, перпендикулярное къ ребру призмы.

Теорема 271. Боковая поверхность призмы ABCDEFGHIK (черт. 270) равняется произведенію периметра p прямого ея сѣченія MNOPQ, на длину l этого ребра, если и периметръ этотъ, и ребро измѣрены одною и тою-же единицею мѣры.

Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что боковая поверхность призмы равна суммѣ площадей

ея граней: ABGF, BCHG, CDIH и т. д.; а площади этихъ граней соотвѣтственно равны (слѣдствіе 1-е теоремы 173 и теорема 217) произведеніямъ: MN.l,NO.l,OP.l и т. д. Слѣдовательно,



Черт. 270.

для полученія боковой поверхности S данной призмы, надо сложить всѣ эти произведенія, т. е.

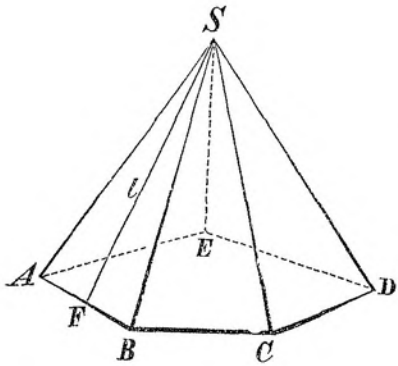
$$S = MN \cdot l + NO \cdot l + OP \cdot l + PQ \cdot l + QM \cdot l$$

откуда, взявъ множителя l за скобки, получимъ:

$S = (MN + NO + OP + PQ + QM) \cdot l = p \cdot l$. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1-е. Боковая поверхность прямой призмы равна произведенію периметра ея основанія на боковое ребро.—Дѣйствительно: боковая поверхность всякой призмы равна произведенію периметра прямого сѣченія на длину ребра (теорема 271). Но въ прямой призмѣ прямое сѣченіе ея равно ея основанію. Слѣд. и т. д.

Слѣдствіе 2-е. Боковая поверхность куба равна учетверенному, а полная ушестеренному квадрату одного изъ его измѣреній.—Убѣдиться въ этомъ предоставляется учащемуся.



Черт. 271

Слѣдствіе 3-е. Если въ прямоугольномъ параллелепипедѣ измѣренія его обозначены буквами a, b и h, гдѣ h обозначаетъ высоту параллелепипеда, то его боков. пов. $s = 2.(a + b).h$; а полная пов. $S = 2(ab + ah + bh)$. Убѣдиться въ этомъ предоставляется учащемуся.

Теорема 272. Боковая поверхность правильной пирамиды SABCDE (черт. 271) равняется

половинѣ произведенія периметра p ея основанія на апоѳему l этой пирамиды, если периметръ этотъ и апоѳема измѣрены одною единицею мѣры.

Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что боковая поверхность правильной пирамиды состоитъ изъ равныхъ между собою равнобедренныхъ треугольниковъ: SAB, SBC, SCD и т. д.; а площадь каждаго изъ этихъ треугольниковъ равняется (слѣдствіе 3-е теоремы 173) половинѣ произведенія основанія треугольника на его высоту, т. е. на апоѳему пирамиды, а потому боковая поверхность пирамиды

$$s = \frac{AB \cdot l}{2} + \frac{BC \cdot l}{2} + \frac{CD \cdot l}{2} + \frac{DE \cdot l}{2} + \frac{EA \cdot l}{2},$$

откуда, взявъ множителя $\frac{l}{2}$ общимъ множителемъ, получимъ

$$s = {}^1/_2 (AB + BC + CD + DE + EA) \cdot l = {}^1/_2 p \cdot l.$$

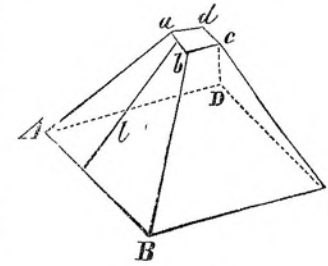
Что и требовалось доказать.

Опредѣленіе. Если пересѣчь правильную пирамиду плоскостью, параллельною основанію, то полученная такимъ образомъ часть пирамиды, ограниченная двумя параллельными правильными многоугольниками (или треугольниками) и трапеціями, называется *правильною усѣченною параллельно основанію пирамидою.*

Теорема 272. Если изъ точекъ, взятыхъ на разныхъ сторонахъ одного основанія правильной усѣченной пирамиды, опустить перпендикуляры на соотвѣтствующія стороны другого ея основанія, то всѣ эти перпендикуляры равны между собою.

Доказательство предоставляется учащемуся.

Опредѣленіе. *Апоѳемою правильной, усѣченной параллельно основанію, пирамиды* называется высота любой изъ трапецій, составляющихъ боковыя грани этой пирамиды; *высотою-же* (или осью) правильной усѣченной пирамиды называется прямая, соединяющая центры основаній этой пирамиды. (Эта прямая перпендикулярна къ основаніямъ пирамиды, въ чемъ предоставляется убѣдиться учащемуся). *Среднимъ сѣченіемъ* правильной пирамиды (полной или усѣченной) называется сѣченіе, раздѣляющее боковыя ребра пирамиды пополамъ. (Это сѣченіе параллельно основанію пирамиды, въ чемъ предоставляется убѣдиться учащемуся).



Черт. 272.

Теорема 273. Боковая поверх-

ность s правильной усѣченной пирамиды ABCD *abcd* (черт. 272) равняется полусуммѣ периметровъ P и p ея основаній, помноженной на ея апоѳему l, если периметры эти и апоѳема измѣрены одною единицею мѣры.

Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что боковая поверхность правильной усѣченной параллельно основанію пирамиды состоитъ изъ трапецій AB*ab*, BC*bc* и т. д.; а площадь каждой трапеціи равняется (теорема 174) половинѣ произведенія изъ суммы ея параллельныхъ сторонъ на ея высоту. Слѣдовательно искомая боковая поверхность

$$s = \frac{AB + ab}{2}.l + \frac{BC + bc}{2}.l + \frac{CD + cd}{2}.l + \text{ и т. д.};$$

откуда а, взявъ множитель $\frac{l}{2}$ за скобки, получимъ, что (аксіома 2-я),

$$s = (AB + BC + \text{и т. д.} + ab + bc + \text{и т. д}).\frac{l}{2} = \frac{(P+p)\,l.}{2}$$

Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Боковая поверхность правильной усѣченной пирамиды равняется произведенію периметра средняго ея сѣченія на ея апоѳему.—Убѣдиться въ этомъ предоставляется учащемуся.

Замѣчаніе. Поверхность тѣла обозначается начальною буквою французскаго слова surface, которое обозначаетъ „поверхность“. При этомъ полную поверхность мы обозначали строчною буквою s, а боковую—прописною буквою S.

Опредѣленія. *Объемомъ тѣла* называется количество пространства, занимаемаго даннымъ тѣломъ. Объемы тѣлъ измѣряются какимъ-нибудь объемомъ, принятымъ за единицу мѣры при измѣреніи объемовъ. За единицу мѣры объемовъ принимаютъ объемъ куба, котораго ребро равняется какой-нибудь общепринятой единицѣ мѣры длины, т. е. объемъ куба, измѣренія котораго равны одной единицѣ мѣры длины: аршину, дюйму, метру и т. п. При этомъ *кубическимъ аршиномъ*, *кубическимъ метромъ*, *кубическимъ дюймомъ* и т. д., называются объемы кубовъ, которыхъ ребра соотвѣтственно равны аршину, метру, дюйму и т. п.

Легко убѣдиться, что существуютъ тѣла разной формы, но занимающія при этомъ одно и то же количество пространства, т. е. различной формы, но одного и того же объема. Для того чтобы въ этомъ убѣдиться, возьмемъ какое нибудь тѣло, лучше всего какой-нибудь многогранникъ, разрѣжемъ его плоскостью на какія нибудь двѣ части и сложимъ эти двѣ части иначе; при этомъ мы можемъ получить тѣло, отличающееся отъ первоначальнаго

своею формою, но одинаковое съ нимъ по объему (или, какъ говорятъ иначе, одинаковое по величинѣ). Тѣла, которыхъ объемы равны между собою, называются *равновеликими* (или равномѣрными), независимо отъ того—равны ли между собою или неравны (т. е. совмѣстимы ли или несовмѣстимы) они между собою.

Лемма 20. Если два тѣла равны между собою (т. е. совмѣстимы одно съ другимъ), то и объемы ихъ равны между собою.

Доказательство ведется такъ же, какъ доказательство леммы 16-й (стр. 161), и предоставляется учащемуся.

Теорема 273. Если (выполненіе чертежа предоставляется учащемуся) въ двухъ прямоугольныхъ параллелепипедахъ AH и IQ одинаковыя основанія ABCD и IKLM и одинаковыя высоты AF и IO, то эти параллелепипеды равны между собою (т. е. совмѣстимы).

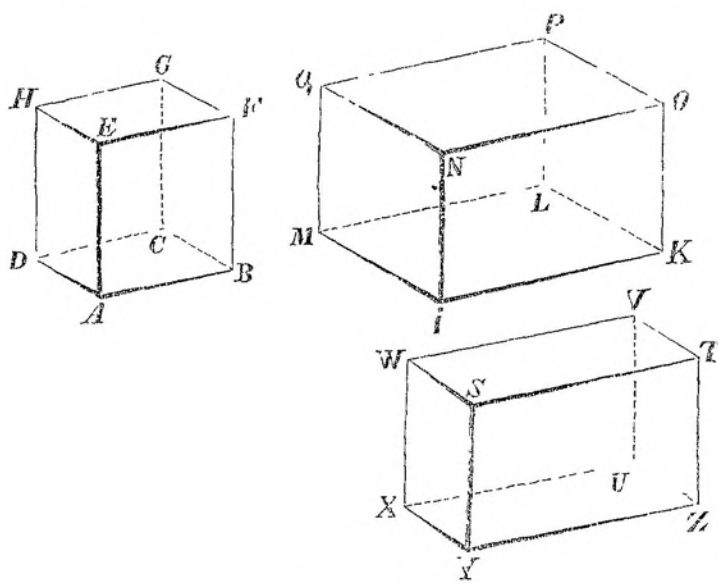
Доказательство. Для доказательства этого приведемъ параллелепипедъ IQ въ такое положеніе, чтобы основаніе его IKLM совпало съ основаніемъ ABCD параллелепипеда AH, притомъ такъ, чтобы точка I совпала съ точкою A, точка K—съ точкою B, точка L—съ точкою C и точка M—съ точкою D. Тогда боковое ребро IO совпадетъ съ боковымъ ребромъ AF, ребро KP—съ ребромъ BG, ребро CR—съ ребромъ HC и ребро MN съ ребромъ DE (теорема 222), и точки O, P, Q и N, по условію совпадутъ соотвѣтственно съ точками F, G, H и E. А въ такомъ случаѣ всѣ грани одного тѣла совмѣстились съ соотвѣтствующими гранями другого; стало-быть, и самыя тѣла совмѣстились, т. е. параллелепипеды эти равны между собою. Что и требовалось доказать.

Теорема 274. Если основанія двухъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ равны между собою, то ихъ объемы относятся между собою какъ высоты этихъ параллелепипедовъ.

Доказательство. При доказательствѣ этой теоремы различаютъ два случая: 1) когда высоты данныхъ параллелепипедовъ соизмѣримы, и 2) когда онѣ несоизмѣримы. Способъ же доказательства при этомъ аналогиченъ способу доказательства теоремъ 119, 169 и 255, съ тою лишь разницею, что въ то время какъ при доказательствѣ теоремы 119 проводятъ нѣкоторые вспомогательные радіусы,—при доказательствѣ теоремы 169 проводятъ нѣкоторыя вспомогательныя параллельныя линіи, при доказательствѣ теоремы 255 нѣкоторыя плоскости чрезъ ребра двугранныхъ угловъ, а при доказательствѣ настоящей теоремы проводятъ нѣкоторыя вспомогательныя плоскости, параллельныя основаніямъ данныхъ параллелепипедовъ.—Выполненіе доказательства предоставляется, въ качествѣ весьма полезнаго упражненія, учащемуся.

Теорема 275. Если (черт. 273) въ двухъ прямоугольныхъ параллелепипедахъ AG и IP высоты AE и IN равны между собою, то объемы ихъ V и v относятся между собою, какъ площади Q и q ихъ основаній.

Доказательство. Для доказательства этого построимъ третій (вспомогательный) параллелепипедъ, котораго высота VU была-бы та же, что у данныхъ параллелепипедовъ, одно изъ остальныхъ измѣреній, напр. длина YZ равнялась-бы длинѣ IK второго изъ числа данныхъ параллелепипедовъ, третье же измѣреніе (толщина) XY равнялась бы толщинѣ AD перваго изъ нихъ. Обозначивъ объемъ вспомогательнаго параллелепипеда буквою V′,



Черт. 273.

сравнимъ объемъ перваго параллелепипеда съ объемомъ вспомогательнаго; у нихъ грани AEHD и YSWX суть равные между собою прямоугольники (почему?). Принявъ эти грани за основанія этихъ двухъ параллелепипедовъ, получимъ (теорема 274) пропорцію: $V : V' = AB : YZ$..... (I)

Сравнимъ теперь объемъ второго параллелепипеда съ объемомъ вспомогательнаго. У нихъ грани IKON и YZTS представляетъ собою равные между собою прямоугольники, а потому, принявъ эти грани за основанія двухъ параллелепипедовъ, получимъ (теорема 274):

$$v : V' = MI : XY \text{..... (II).}$$

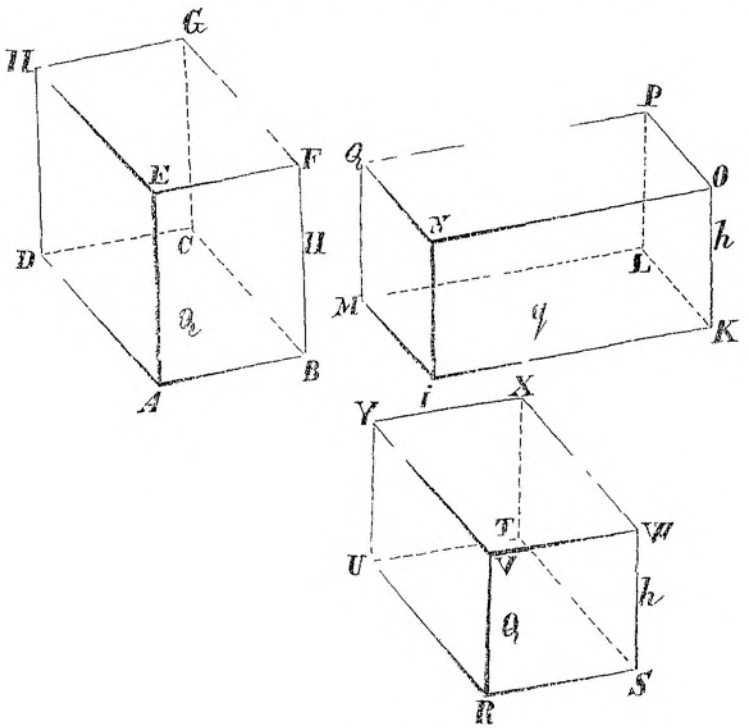
Раздѣливъ почленно пропорцію (I) на пропорцію (II), получимъ:

$$V : v = \frac{AB}{MI} : \frac{YZ}{YX}, \text{ или } V : v = AB \,.\, XY : YZ.MI;$$

Но $XY = AD$, и $YZ = IK$;

слѣдовательно (аксіома 5 я): $V : v = AB.\, AD : IK.\, MI$ или (аксіома 5 и теорема 171) $V : v = Q : q$. Что и требовалось доказать.

Теорема 276. Если (черт. 274) даны два прямоугольныхъ параллелепипеда AG и IP, то объемъ V перваго изъ нихъ относится къ объему v второго, какъ произведеніе изъ числа B, выражающаго площадь основанія перваго изъ нихъ, на число H,



Черт. 274

выражающее высоту его, относится къ произведенію числа b, выражающаго площадь основанія второго изъ нихъ, на число h, выражающее его высоту, если при этомъ площади измѣрены одною и тою-же единицею мѣры площадей, а высоты измѣрены одною и тою-же мѣрою длины.

Доказательство Для доказательства этого построимъ третій, вспомогательный, параллелепипедъ, у котораго основаніе равно основанію перваго изъ данныхъ параллелепипедовъ, а высота—

высотѣ второго изъ нихъ, и обозначимъ объемъ третьяго (вспомогательнаго) параллелепипеда буквою V'; тогда получимъ:

$V : V' = H : h$ (теорема 274) и $v : V' = b : B$ (теорема 275).

Раздѣливъ почленно первую пропорцію на вторую, получимъ:

$$V : v = \frac{H}{b} : \frac{h}{B}, \text{ или } V : v = B \,.\, H : b.h.$$

Что требовалось доказать.

Слѣдствіе 1-е. Объемъ прямоугольнаго параллелепипеда содержитъ въ себѣ столько-же кубическихъ единицъ мѣры, сколько отвлеченныхъ единицъ содержится въ произведеніи чиселъ, выражающихъ площадь его основанія въ какой-нибудь единицѣ мѣры площадей и высоту въ одноименныхъ единицахъ мѣры длины.— Дѣйствительно: если за единицу мѣры объемовъ принятъ кубическій футъ, а за единицу мѣры длины футъ линейный, если при этомъ въ основаніи даннаго прямоугольнаго параллелепипеда содержится B квадратныхъ футовъ, а въ высотѣ H линейныхъ футовъ, если, наконецъ, кубическій футъ принять за единицу мѣры объемовъ, а объемъ прямоугольнаго параллелепипеда обозначить буквою V, то (теорема 276)

$$V : 1 \text{ куб. ф.} = B \,.\, H : 1.1, \text{ откуда } V = B \,.\, H.$$

Слѣдствіе 2-е. *Если измѣренія даннаго прямоугольнаго* параллелепипеда содержатъ въ себѣ x, y и z какихъ-нибудь линейныхъ единицъ, то въ объемѣ этого параллелепипеда содержится столько-же одноименныхъ кубическихъ единицъ, сколько отвлеченныхъ содержится въ произведеніи отвлеченныхъ чиселъ x, y и z. Дѣйствительно: принявъ, что высота равна z единицамъ, мы получимъ, что объемъ параллелепипеда

$$V : 1 \text{ куб. ф.} = B.\, z,$$

гдѣ B въ свою очередь равно $x.\, y$, а потому

$$V : 1 \text{ куб. ф.} = x.\, y.\, z.$$

Замѣчаніе 1-е. Теорему 276 обыкновенно формулируютъ короче слѣдующимъ образомъ: объемы двухъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ относятся между собою какъ произведенія площадей ихъ основаній на ихъ высоты.

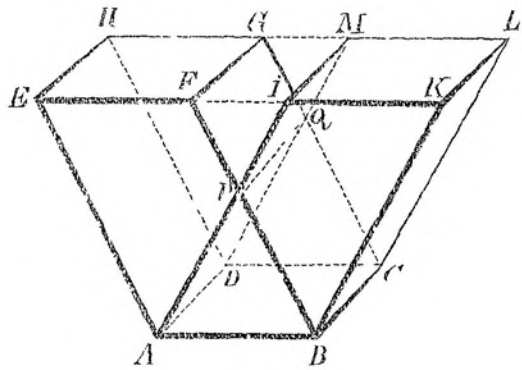
Замѣчаніе 2-е. Обыкновенно слѣдствіе 1-е выражаютъ короче слѣдующимъ образомъ: объемъ прямоугольнаго параллелепипеда равняется произведенію площади его основанія на высоту.

Замѣчаніе 3-е. Обыкновенно слѣдствіе 2-е формулируютъ короче слѣдующимъ образомъ: объемъ прямоугольнаго параллелепипеда равняется произведенію всѣхъ трехъ его измѣреній.

Теорема 277. Если въ двухъ параллелепипедахъ ABCDEFGH и ABCDIKEM общее основаніе ABCD, а остальныя два основанія

IKEM и EFGH лежатъ въ одной и той же плоскости, то эти параллелепипеды равновелики.

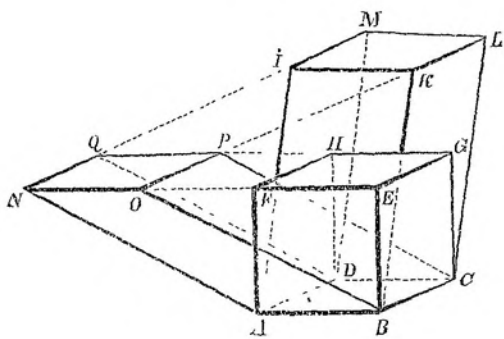
Доказательство. При доказательствѣ этой теоремы различаютъ два случая: 1) когда (черт. 275) двѣ противолежащія сто-



Черт. 275.

роны IK и LM одного изъ верхнихъ основаній IKEM лежатъ на однѣхъ и тѣхъ же двухъ прямыхъ съ двумя противулежащими сторонами EF и HG *другого* основанія EFGH, и 2) когда (черт. 276) противолежащія стороны одного изъ основаній лежатъ не на однѣхъ и тѣхъ же прямыхъ съ двумя противолежащими сторонами другого.

1-ый случай. Въ первомъ случаѣ (черт. 275) проведемъ прямыя FI и GM и линію PQ пересѣченія плоскостей AM и CF,



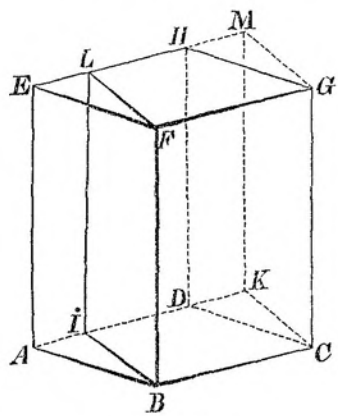
Черт. 276.

а также всѣ плоскости, которыя необходимы для образованія призмы PIFQMG. Тогда получимъ нѣкоторую четыреугольную призму, которой основанія суть трапеціи ABKE и DCLH. Если отъ этой

четыреугольной призмы отрѣзать прочь треугольную призму FKBGLC, то получится одинъ изъ данныхъ параллелепипедовъ; если-же отъ разсматриваемой четыреугольной призмы отрѣзать прочь треугольную призму EIAHMD, то получится другой изъ данныхъ параллелепипедовъ. Но эти двѣ треугольныя призмы между собою равны, какъ въ томъ легко убѣдиться наложеніемъ (это предоставляется учащемуся). Стало-быть, и объемы данныхъ параллелепипедовъ между собою равны, т. е. данные два параллелепипеда равновелики. Что и требовалось доказать.

2-ой случай. Во второмъ случаѣ мы для доказательства теоремы продолжимъ стороны GH и FE верхняго основанія одного изъ параллелепипедовъ до пересѣченія съ прилично продолженными сторонами MI и LK верхняго основанія другого параллелепипеда. Эти продолженія пересѣкутся (почему?) и образуютъ, параллелограммъ NOPQ (почему?). Соединивъ точку N съ точкою A, точку O съ точкою B, точку P съ точкою C, а точку Q съ точкою D, и проведя приличнымъ образомъ плоскости черезъ прямыя NO и AB, OP и BC, PQ и CD, NQ и AD, получимъ параллелепипедъ BQ. Объемъ каждаго изъ данныхъ двухъ параллелепипедовъ, какъ это доказано выше, равенъ объему новаго параллелепипеда BQ, а потому (аксіома 6-я) объемы данныхъ двухъ параллелепипедовъ тоже равны между собою, т. е. эти два параллелепипеда равновелики. Стало-быть, если въ двухъ параллелепипедахъ общее основаніе, а остальныя основанія лежатъ въ одной плоскости, то эти параллелепипеды равновелики. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Если въ двухъ параллелепипедахъ основанія равны между собою, и высоты тоже между собою равны, то параллелепипеды равновелики. — Дѣйствительно: въ этомъ случаѣ можно наложеніемъ достигнуть того, чтобы два основанія совпали, а верхнія два основанія лежали бы въ одной и той же плоскости. Убѣдиться въ этомъ предоставляется учащемуся.



Черт. 277.

Теорема 278. Объемъ прямого параллелепипеда ABCDEFGH (черт. 277) равенъ произведенію площади его основанія на высоту.

Доказательство. Для доказательства этого проведемъ черезъ прямыя BF и CG плоскости перпендикуляр-

ныя къ плоскости AH и приличнымъ образомъ продолжимъ плоскости AC, HF и AH; чтобы получить прямоугольный параллелепипедъ IBCKLFGM. Принявъ грань BCGF за основаніе двухъ равновеликихъ (теорема 277) параллелепипедовъ BH и BM (которыхъ остальныя основанія суть ADEH и IKML) и обозначивъ объемъ прямоугольнаго параллелепипеда BM буквою V', а объемъ даннаго параллелепипеда буквою V, получимъ, что $V = V' =$ пл. IBCK $\times$ BF (слѣдствіе 1-ое теоремы 276); но въ свою очередь (теорема 172)

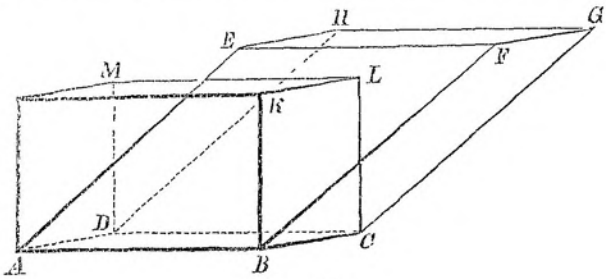
$$\text{пл. IBCK} = \text{пл. ABCD};$$

стало-быть,

$$V = \text{пл. ABCD} \cdot BF.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 279. Объемъ всякаго параллелепипеда ABCDEFGH (черт. 278) равенъ произведенію площади его основанія на высоту.



Черт. 278.

Доказательство. Для доказательства этого изъ точекъ A, B, C и D возставимъ къ основанію ABCD перпендикуляры, а плоскость верхняго основанія EFGH продолжимъ до пересѣченія съ этими перпендикулярами въ точкахъ I, K, L и M; затѣмъ проведемъ приличнымъ образомъ плоскости чрезъ прямыя AI и BK, BK и CL, CL и DM, DM и AI, дабы такимъ образомъ получить прямой параллелепипедъ ABCDIKLM. Тогда, обозначивъ объемъ даннаго параллелепипеда AG буквою V, а объемъ прямоугольнаго параллелепипеда AL буквою V', получимъ

$V = V'$ (теорема 277); но $V' =$ пл. ABCD . BK (теорема 278) откуда (аксіома 6-я),

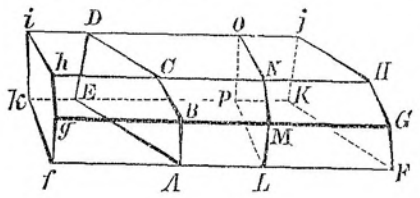
$$V = \text{пл. ABCD} \cdot BK,$$

гдѣ прямая BK можетъ быть разсматриваема какъ высота даннаго параллелепипеда AF. Стало-быть, объемъ всякаго параллелепипеда равенъ произведенію площади его основанія на его высоту. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Само собою разумѣется, что теоремы 278 и 279 должно, строго говоря, формулировать на подобіе того, какъ формулировано слѣдствіе 1-ое теоремы 276. Что предоставляется учащемуся.

Теорема 280. Всякая наклонная призма ABCDEFGHIK (черт. 279) равновелика прямой призмѣ, высота которой равняется ребру данной призмы, а основаніе равно прямому сѣченію ея LMNOP.

Доказательство. Для доказательства этого продолжимъ ребра FA, GB, HC, ID и KE и на этихъ продолженіяхъ отложимъ соотвѣтственно: отрѣзокъ A*f* равный прямой LF, отрѣзокъ B*g* равный MG, отрѣзокъ C*h* равный NH, отрѣзокъ D*i* равный OI, отрѣзокъ E*k* равный PK. Такимъ образомъ мы получили рядъ взаимно-параллельныхъ и перпендикулярныхъ къ сѣченію LMNOP отрѣзковъ L*f*, M*g*, N*h*, O*i*, P*k*, которые равны между собою (почему?). Всѣ точки *f*, *g*, *h*, *i*, *k* лежатъ въ одной плоскости, параллельной плоскости прямого сѣченія призмы (почему?), а потому многоугольникъ *fghik* есть многоугольникъ равный прямому сѣченію ея. Наложеніемъ легко убѣдиться (это предоставляется учащемуся), что усѣченная не параллельно основанію прямая призма LMNOPFGHIK равна призмѣ *fghik*ABCDE. Отрѣзавъ отъ всей призмы *fghik*FGHIK часть LI, мы получимъ прямую призму *f*O; отрѣзавъ отъ всей призмы часть *f*D, равную части LI, получимъ данную намъ первоначально наклонную призму AI. Отсюда заключаемъ (аксіома 8-ая), что объемъ призмы AI равенъ объему призмы *fo*. Стало-быть, всякая наклонная призма равновелика прямой призмѣ, которой высота равна ребру данной призмы, а основаніе равно прямому ея сѣченію. Что и требовалось доказать.



Черт. 279.

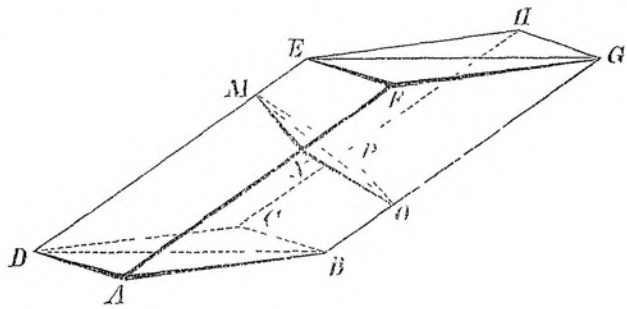
Теорема 281. Если въ двухъ прямыхъ призмахъ ABCDE*abcde* и FGHIK*fghik* основанія равны между собою и высоты также между собою равны, то и призмы эти равны между собою, т. е. совмѣстимы одна съ другою.

Доказательство ведется съ помощью наложенія и предоставляется, равно какъ и выполненіе чертежа, учащемуся.

Слѣдствіе 1-ое. Діагональная плоскость прямого параллелепипеда, проведенная чрезъ два ребра, перпендикулярныя къ основаніямъ его, раздѣляетъ параллелепипедъ на двѣ равныя между собою треугольныя призмы.—Дѣйствительно: такая діагональная плоскость, раздѣляя двѣ противолежащія грани пополамъ, раздѣляетъ также и самый параллелепипедъ на двѣ прямыя треугольныя призмы съ равными основаніями и равными высотами. Стало-

быть (теорема 281) и самыя треугольныя призмы равны между собою.

Слѣдствіе 2-ое. Діагональная плоскость наклоннаго параллелепипеда раздѣляетъ его на двѣ равновеликія треугольныя призмы.—Дѣйствительно: пусть (черт. 280) данъ наклонный параллелепипедъ ABCDEFGH; проведемъ діагональную плоскость GEDB и перпендикулярное къ ребру этой призмы сѣченіе MNOP. Это сѣченіе — параллелограммъ (почему?), и притомъ діагональная плоскость HB раздѣляетъ его на два равныхъ треугольника. Каждая изъ полученныхъ такимъ образомъ треугольныхъ призмъ ABDEFG и



Черт. 280.

BCDEGH равновелика треугольной призмѣ, имѣющей высоту равную ребру данной призмы, а основаніемъ треугольникъ, составляющій половину прямого сѣченія (теорема 280). Но эти двѣ прямоугольныя призмы равны между собою (слѣдствіе 1-ое теоремы 281); стало-быть двѣ треугольныя призмы AEG и CEG, на которыя данный параллелепипедъ разбитъ діагональною плоскостью EB, равновелики.

Замѣчаніе. Начинающему трудно иногда отказаться отъ одной ошибочной мысли: ему иногда кажется, будто призмы AEG и CEG (черт. 280) вообще не только равновелики, но и равны между собою (совмѣстимы). Эта мысль не вѣрна, и въ несовмѣстимости занимающихъ насъ треугольныхъ призмъ очень легко убѣдиться, принявъ въ соображеніе, что трегранный уголъ A несовмѣстимъ ни съ угломъ C, ни даже съ угломъ H, плоскіе углы котораго порознь равны плоскимъ угламъ угла A.

Слѣдствіе 3-е. Объемъ треугольной призмы равняется произведенію площади ея основанія на высоту. — Дѣйствительно: объемъ треугольной призмы равняется половинѣ объема параллелепипеда, имѣющаго вдвое большее основаніе и ту же высоту (слѣдствіе 2-ое), а объемъ параллелепипеда равняется произведе-

нію площади его основанія на высоту; стало-быть, объемъ треугольной призмы равняется произведенію половины площади основанія этого параллелепипеда на высоту послѣдняго, т. е. равняется произведенію площади основанія данной треугольной призмы на ея высоту.

Слѣдствіе 4-е. Объемъ прямой треугольной призмы равняется произведенію площади ея основанія на боковое ребро.—Дѣйствительно: въ этомъ случаѣ ребро является высотою треугольной призмы.

Слѣдствіе 5-е. Объемъ всякой многоугольной призмы равняется произведенію площади ея основанія на ея высоту.—Дѣйствительно: проведя чрезъ одно изъ боковыхъ реберъ данной многоугольной призмы діагональныя плоскости, мы раздѣлимъ ее на нѣкоторое число треугольныхъ призмъ, и объемъ каждой изъ этихъ треугольныхъ призмъ будетъ равенъ произведенію площади ея основанія на ея высоту, а сумма объемовъ всѣхъ треугольныхъ призмъ—произведенію суммы площадей ихъ основаній на ихъ общую высоту. Сумма-же площадей всѣхъ основаній этихъ треугольныхъ призмъ равняется площади основанія данной многоугольной призмы, а потому объемъ многоугольной призмы равенъ произведенію площади ея основанія на высоту.

Слѣдствіе 6-е. Объемъ прямой призмы равняется произведенію площади ея основанія на боковое ребро.—Дѣйствительно: въ этомъ случаѣ ребро является высотою призмы.

Слѣдствіе 7-е. Объемы двухъ призмъ относятся между собою, какъ произведенія изъ основаній ихъ на соотвѣтствующія высоты.—Дѣйствительно: если буквы V и v обозначаетъ объемы данныхъ призмъ, буквы B и b—площади ихъ основаній, а буквы H и h—высоты ихъ, то (слѣдствіе 5)
$V = B.H$, а $v = b \,.\, h$, откуда (аксіома 13-я) $V : v = B.H : b \,.\, h$.

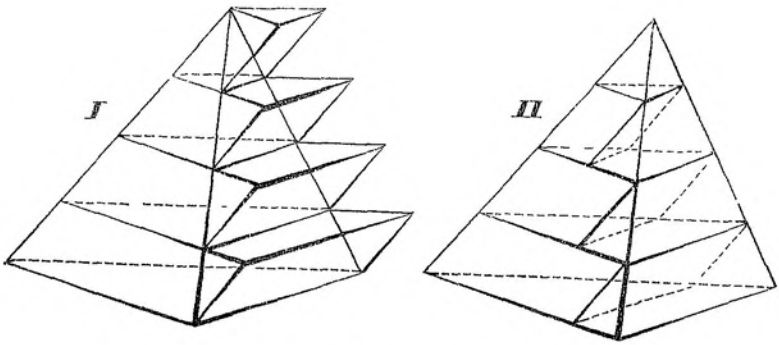
Слѣдствіе 8-е. Объемы призмъ, которыхъ высоты равны между собою, относятся какъ площади основаній.—Это вытекаетъ изъ предыдущаго слѣдствія.

Слѣдствіе 9-е. Объемы призмъ, которыхъ основанія равны между собою, относятся между собою какъ высоты.—Это вытекаетъ изъ слѣдствія 7-го.

Слѣдствіе 10-е. Объемъ всякой призмы равняется произведенію площади прямого ея сѣченія на это ребро.—Убѣдиться въ этомъ предоставляется учащемуся.

Опредѣленія. Если раздѣлить какое-нибудь изъ боковыхъ реберъ данной треугольной пирамиды на произвольное число равныхъ между собою частей, если затѣмъ черезъ точки дѣленія

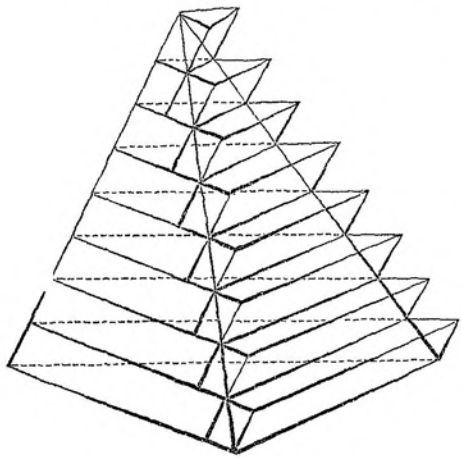
провести сѣченія параллельныя основанію, если далѣе принять ближайшее къ вершинѣ сѣченіе за основаніе треугольной призмы, имѣющей ту же высоту, что и усѣченная часть пирамиды, если, наконецъ, каждое изъ послѣдующихъ сѣченій въ свою очередь принять за основаніе все новыхъ и новыхъ призмъ, которыя имѣютъ ту же высоту, что и соотвѣтствующія усѣченныя части пирамиды, то получится совокупность треугольныхъ призмъ, которую условимся называть *системою описанныхъ призмъ данной треугольной пирамиды*. Если одно изъ боковыхъ реберъ треугольной пирамиды раздѣлить на столько-же равныхъ между собою частей, черезъ каждую изъ точекъ дѣленія провести сѣченія, параллельныя основанію, отсѣченную часть пирамиды, ближайшую къ вершинѣ, не принимать во вниманіе, а въ каждой изъ усѣченныхъ пирамидъ построить треугольныя призмы, основанія которыхъ равны верхнимъ основаніямъ данныхъ усѣченныхъ пирамидъ, а высоты равны высотамъ каждой изъ усѣченныхъ пирамидъ, то получится нѣкоторая совокупность призмъ, которую условимся называть *системою вписанныхъ призмъ данной треугольной треугольной пирамиды. Соотвѣтствующими другъ другу системами* данной пирамиды условимся называть системы описанныхъ и вписанныхъ призмъ, полученныя тогда, когда ребро раздѣлено въ обоихъ случаяхъ на одно и то же число равныхъ между собою частей. Черт. 280 даетъ представленіе о системѣ вписанныхъ



Черт. 280.

призмъ пирамиды (II) и о системѣ призмъ описанныхъ такой же пирамиды (I).—Если построены двѣ соотвѣтствующія системы описанныхъ и вписанныхъ треугольныхъ призмъ данной треугольной пирамиды, то число описанныхъ призмъ больше числа вписанныхъ на одну единицу; убѣдиться въ этомъ предоставляется учащемуся.

Теорема 282. Если (черт. 281) въ треугольную пирамиду вписаны и описаны двѣ соотвѣтствующія системы пирамидъ, то первая, считая отъ вершины, описанная призма равна первой, считая отъ вершины, вписанной призмѣ, вторая описанная—второй вписанной и т. д. до предпослѣдней описанной призмы включительно, которая равна послѣдней вписанной пирамидѣ.



Черт. 281.

Доказательство основано на теоремѣ 269 и предоставляется учащемуся.

Слѣдствіе. Разность между объемами двухъ соотвѣтствующихъ системъ описанныхъ и вписанныхъ призмъ одной и той же треугольной пирамиды равна послѣдней, считая отъ вершины, описанной призмѣ данной пирамиды.—Дѣйствительно: обозначивъ число описанныхъ призмъ буквою n, объемъ каждой изъ нихъ, по порядку, символами:

$$V_1,\ V_2,\ V_3,\ \ldots,\ V_{n-1} \text{ и } V_n\ ,$$

объемъ каждой изъ вписанныхъ призмъ, по порядку, символами:

$$v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3\ ,\ \ldots.\ v_{n-2}\ ,\ v_{n-1}\ ,$$

сумму описанныхъ призмъ буквою S, а сумму вписанныхъ буквою s, получимъ:

$$S = V_1 + V_2 + \ldots. + V_{n\ -1} + V_n\ ,$$

а

$$s = v_1 + v_2 + \ldots. + v_{n-2} + v_{n-1}\ .$$

А потому (аксіома 8)

$$S - s = V_1 - v_1 + V_2 - v_2 + \ldots + V_{n-1} - v_{n-1} + V_n\ ,$$

откуда на основаніи теоремы 282, получимъ, что

$$S - s = V_n\ .$$

Теорема 283. Объемъ треугольной пирамиды есть предѣлъ объема системы вписанныхъ, а также предѣлъ объема системы описанныхъ призмъ данной пирамиды, при безконечномъ увеличеніи числа ихъ.

Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что объемъ системы описанныхъ призмъ больше объема пирамиды (аксіома 1-ая), а объемъ пирамиды въ свою очередь больше объема системы вписанныхъ призмъ (аксіома 1-ая). Обо-

значивъ объемъ системы описанныхъ призмъ буквою S, объемъ системы призмъ вписанныхъ буквою s, а объемъ пирамиды буквою V, найдемъ такимъ образомъ, что $S > V > s$. Но разность $S - s = V_n$, гдѣ V_n обозначаетъ объемъ послѣдней (считая отъ вершины) описанной призмы; кромѣ того (слѣдствіе 3 теорема 282)

$$V_n = B \cdot \frac{h}{n},$$

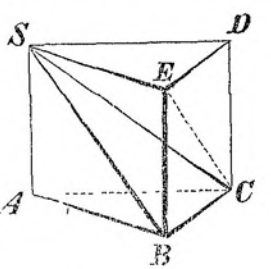
гдѣ B обозначаетъ основаніе пирамиды, h ея высоту, а n—число всѣхъ описанныхъ пирамидъ. А потому (аксіома 5-ая) разность

$$S - s < B \cdot \frac{h}{n} \cdot$$

Но B есть величина постоянная для данной пирамиды, а частное $\frac{h}{n}$ величина безконечно-малая. Стало-быть, разность $S - s$ есть величина безконечно-малая, а потому и подавно разности $S - V$ и $V - s$ суть величины безконечно-малыя, т. е. объемъ треугольной пирамиды есть предѣлъ объема системы описанныхъ, а также предѣлъ объема системы вписанныхъ призмъ ея. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Если основанія двухъ треугольныхъ пирамидъ равновелики, а высоты ихъ между собою равны, то пирамиды эти равновелики.—Дѣйствительно: раздѣлимъ высоты этихъ пирамидъ на одинаковое число равныхъ частей, построимъ соотвѣтствующія системы призмъ въ каждой изъ нихъ и обозначимъ объемы системъ описанныхъ призмъ обѣихъ пирамидъ буквами S_1 и S_2, а объемы этихъ пирамидъ символами V_1 и V_2. Тогда (слѣдствіе 7 теоремы 282) $S_1 = S_2$. Но S_1 и S_2 суть перемѣнныя величины, а V_1 и V_2 ихъ предѣлы. Стало-быть (теорема 184) $V_1 = V_2$. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Если у двухъ пирамидъ одно и то же основаніе и одинаковыя высоты, то изъ этого не слѣдуетъ, что онѣ равны между собою, а слѣдуетъ только то, что онѣ равновелики. Для равенства же двухъ пирамидъ необходима нѣкоторая зависимость также между двугранными углами этихъ пирамидъ. Ср. теорему 269.



Черт. 282.

Теорема 284. Объемъ всякой треугольной пирамиды SABC (черт. 282) составляетъ одну треть объема призмы ABCDEF, имѣющей одно съ нею основаніе и одну и ту же высоту.

Доказательство.—Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что призма эта состоитъ изъ двухъ частей, изъ которыхъ

одну составляетъ данная пирамида, а другую составляетъ четыреугольная пирамида SBCED. Эту послѣднюю четыреугольную пирамиду раздѣлимъ плоскостью SEC на двѣ треугольныя пирамиды, которыя, во всякомъ случаѣ, равновелики (слѣдствіе теоремы 283 и теорема 50). Но въ пирамидѣ SEDC за вершину можно принять точку C, тогда основаніе ея будетъ $\triangle$ SED, откуда заключаемъ, что пирамида SED равновелика пирамидѣ SABC (слѣдствіе теоремы 283). А потому призма ABCDEF состоитъ изъ трехъ равновеликихъ пирамидъ, изъ которыхъ каждая, а стало-быть и данная пирамида составляетъ одну треть этой призмы, имѣющей съ нею одно и то же основаніе и одну и ту же высоту. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1-ое. Объемъ треугольной пирамиды равняется одной трети произведенія изъ площади ея основанія на ея высоту.—Убѣдиться въ этомъ предоставляется учащемуся.

Слѣдствіе 2-ое. Объемъ многоугольной пирамиды равняется одной трети произведенія площади ея основанія на ея высоту.—Дѣйствительно: всякая многоугольная пирамида можетъ быть прилично выбранными діагональными плоскостями раздѣлена на опредѣленное число треугольныхъ пирамидъ. Обозначивъ площади основаній этихъ треугольныхъ пирамидъ символами: b_1, b_2, b_3, ..., b_n, высоту буквою H, площадь основанія данной многоугольной пирамиды буквою B, а объемъ ея буквою V, найдемъ, что

$$V = \tfrac{1}{3}\, b_1\, H + \tfrac{1}{3}\, b_2\, H + \tfrac{1}{3}\, b_3\, H + \ldots + \tfrac{1}{3}\, b_n \,.\, H =$$
$$\tfrac{1}{3}\,(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)\,.\, H = \tfrac{1}{3}\, BH.$$

Слѣдствіе 3-е. Объемъ всякой многоугольной пирамиды равенъ трети объема многоугольной призмы, имѣющей одно съ нею основаніе и ту же высоту.—Убѣдиться въ этомъ предоставляется учащемуся.

Слѣдствіе 4-ое. Объемы двухъ пирамидъ относятся между собою, какъ произведенія ихъ основаній на высоты.

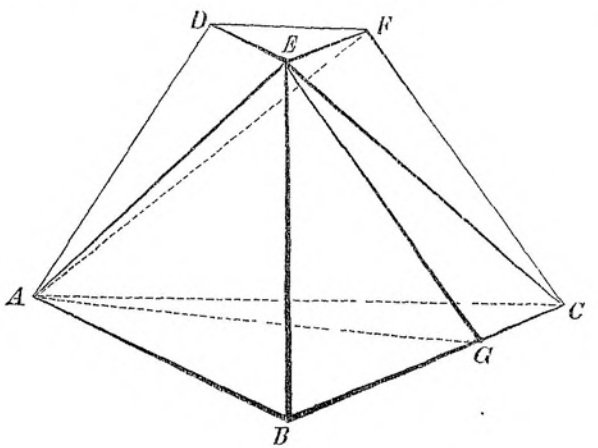
Слѣдствіе 5-ое. Объемы двухъ пирамидъ съ равными высотами относятся между какъ площади ихъ основаній.

Слѣдствіе 6-ое. Объемы двухъ пирамидъ съ равновеликими основаніями относятся между собою какъ высоты этихъ пирамидъ.—Убѣдиться въ справедливости послѣднихъ трехъ предложеній тоже предоставляется учащемуся.

Теорема 285. Объемъ усѣченной параллельно основанію треугольной пирамиды равенъ суммѣ объемовъ трехъ пирамидъ, у которыхъ высота равна высотѣ данной усѣченной пирамиды, а основаніе первой, второй и третьей пирамиды соотвѣтственно равны: нижнему основанію данной усѣченной пирамиды, верхнему

ея основанію и основанію, площадь котораго есть средняя пропорціональная между площадями верхняго и нижняго основаній данной усѣченной пирамиды.

Доказательство. Для доказательства обозначимъ площадь верхняго основанія буквою Q, а площадь нижняго буквою q, и проведемъ плоскости черезъ точки A, E и F и черезъ точки A, E и C; такимъ образомъ мы раздѣлимъ данную усѣченную пирамиду на три треугольныя пирамиды, изъ которыхъ одна (пирамида EABC) имѣетъ основаніемъ $\triangle$ ABC, высота же ея равна высотѣ данной усѣченной пирамиды; другая (пирамида ADEF) имѣетъ основаніемъ $\triangle$ EDF, и высота ея тоже равна высотѣ данной усѣченной пирамиды; наконецъ, третья (AEFC) имѣетъ основаніемъ тр—къ AEF, высота же ея неизвѣстна. Изъ точки E проведемъ прямую EG



Черт. 283.

параллельную къ прямой FC, точки A и G соединимъ прямою AG, а затѣмъ черезъ точки E, A и G проведемъ плоскость. Тогда занимающая насъ пирамида ACEF равновелика пирамидѣ ACEG, а въ этой послѣдней пирамидѣ за основаніе можно принять тр—къ ACG, и тогда высота ея будетъ равна высотѣ данной усѣченной пирамиды.—Остается только доказать, что площадь треугольника ACG есть средняя пропорціональная между площадями треугольниковъ ABC и DEF. Чтобы убѣдиться въ этомъ, примемъ во вниманіе, что (теорема 171 и аксіома 5)

$$\frac{\text{пл. Q}}{\text{пл.}\triangle\text{ACG}} = \frac{\text{CA . CB}}{\text{CA . CG}} = \frac{\text{CB}}{\text{CG}} = \frac{\text{CB}}{\text{EF}};$$

кромѣ того, $\dfrac{\text{пл.}\triangle\text{ACG}}{\text{пл. } q} = \dfrac{\text{GA . CG}}{\text{FD . EF}} = \dfrac{\text{CA}}{\text{FD}}$.

Но, кромѣ того, изъ подобія треугольниковъ ACB и DFE слѣдуетъ, что $\frac{CB}{FE} = \frac{CA}{FD}$; слѣдовательно (аксіома 6-я) $\frac{\text{пл. Q}}{\text{пл. } \triangle AGC} = \frac{\text{пл. } \triangle AGC}{\text{пл. } q}$, т. е. площадь треугольника ACG есть средняя пропорціональная между площадями нижняго и верхняго основаній данной усѣченной пирамиды. Стало быть, объемъ усѣченной пирамиды равенъ объему трехъ пирамидъ, у которыхъ та же высота, что у данной усѣченной пирамиды, и основанія которыхъ по порядку равны Q, q и Qq, гдѣ Q и q обозначаютъ площади нижняго и верхняго основанія данной усѣченной пирамиды. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Объемъ всякой многоугольной усѣченной параллельно основанію пирамиды равенъ суммѣ объемовъ трехъ пирамидъ, у которыхъ высота равна высотѣ данной усѣченной пирамиды, а основанія по порядку равны: нижнему основанію данной пирамиды, верхнему ея основанію и основанію, площадь котораго есть средняя пропорціональная между площадями верхняго и нижняго основаній.—Дѣйствительно: дополнивъ данную усѣченную пирамиду пирамидою, которая вмѣстѣ съ нею образовала бы первоначальную полную пирамиду, затѣмъ построимъ треугольную пирамиду, которой основаніе равновелико основанію полной пирамиды, а высота равна ея высотѣ. Далѣе проведемъ плоскость параллельную къ ея основанію такъ, чтобы образовалась усѣченная пирамида, высота которой равна высотѣ данной усѣченной. Дальнѣйшее предоставляется учащемуся.

Замѣчаніе 1-е. Такимъ образомъ формула объема всякой усѣченной параллельно основанію пирамиды гласитъ:

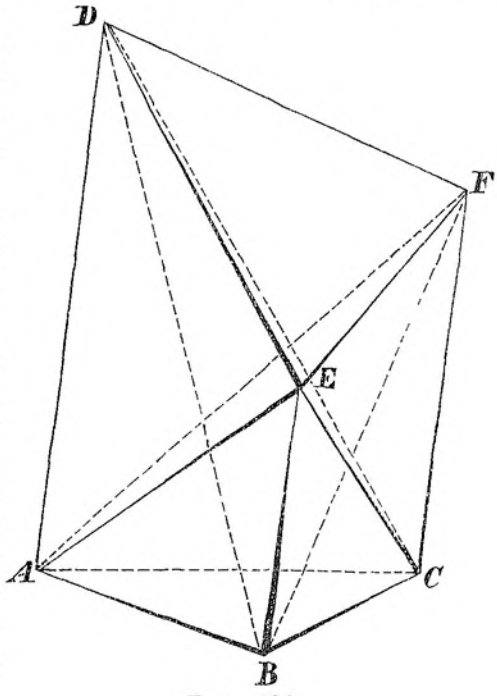
$$V = {}^1/_3 (Q + q + \sqrt{Qq}). \text{ H.}$$

Опредѣленіе. Если черезъ какую нибудь точку одного изъ реберъ треугольной призмы провести плоскость, не параллельную къ основаніямъ ея, но пересѣкающую остальныя два ребра, то данная призма раздѣлится такимъ образомъ на двѣ части, изъ которыхъ каждая называется *усѣченною треугольною призмою.*

Теорема 286. Объемъ усѣченной треугольной призмы ABCDEF (черт. 284) равенъ суммѣ объемовъ трехъ пирамидъ, въ которыхъ основаніе равно основанію данной призмы, а вершины совпадаютъ съ тремя вершинами D, E и F сѣченія.

Доказательство. Для доказательства этого проведемъ черезъ точки E, A и C плоскость; мы такимъ образомъ раздѣлимъ данную призму на двѣ пирамиды, изъ которыхъ въ одной (треугольной) основаніемъ и служитъ $\triangle$ ABC, а вершиною точка E, а въ другой (четыреугольной) основаніемъ служитъ четыре-

угольникъ ACFD, а вершиною та же точка E. Къ этой послѣдней (четыреугольной) пирамидѣ мы и обратимся.—Проведя плоскость черезъ точки D, E и C, мы эту четыреугольную пирамиду раздѣлимъ на двѣ треугольныя пирамиды EACD и ECDF. Проведя плоскость чрезъ точки: D, B и C, получимъ, что пирамида EACD равновелика пирамидѣ DABC (слѣдствіе 6 теоремы 284). Пирамиды (EABC и EACD) изъ числа трехъ, на которыя распадается данная призма, равновелики пирамидамъ, которыхъ общее основаніе ABC, а вершины совпадаютъ съ точками D и E не параллельнаго сѣченія DEF. Что же касается третьей пирамиды ECFD, то, проведя плоскость чрезъ точки F, A и B, получимъ пирамиду FABC, которая разновелика пирамидѣ ECFD (слѣдствіе 6 теоремы 284). Стало-быть, объемъ треугольной усѣченной призмы равенъ суммѣ объемовъ трехъ пирамидъ, которыхъ основаніе совпадаетъ съ основаніемъ данной призмы, а вершины находятся въ вершинахъ не параллельнаго сѣченія. Что и требовалось доказать.



Черт. 284.

Слѣдствіе 1-е. Объемъ прямой усѣченной треугольной призмы равенъ суммѣ объемовъ трехъ пирамидъ, имѣющихъ общее основаніе равное основанію призмы, а высоты порознь равныя ребрамъ данной призмы.

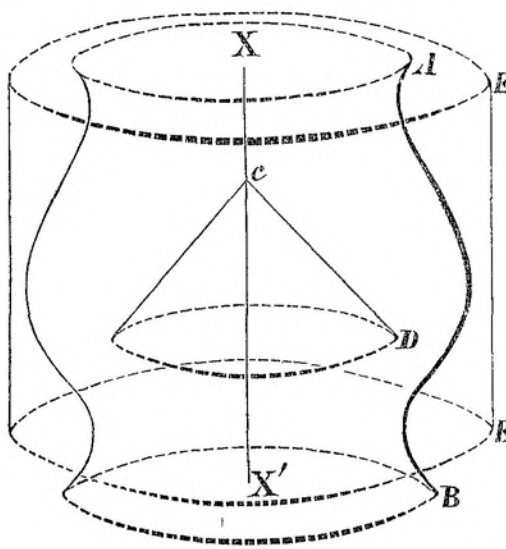
Слѣдствіе 2-е. Объемъ прямой усѣченной треугольной призмы равенъ объему пирамиды, которой основаніе равно основанію данной призмы, а высота равна среднему ариѳметическому реберъ данной призмы. — Дѣйствительно: обозначивъ основаніе призмы буквою B, а длину реберъ буквами L_1, L_2, L_3, получимъ (слѣдствіе 1-е). что объемъ усѣченной призмы.

$$V = \frac{B \cdot L_1}{3} + \frac{B \cdot L_2}{3} + \frac{B \cdot L_3}{3} = \frac{B \cdot (L_1 + L_2 + L_3)}{3}.$$

А это послѣдняя дробь выражаетъ объемъ треугольной пирамиды, которой площадь основанія ровна B, а высота $\frac{1}{3}$ есть средняя ариѳметическая боковыхъ реберъ данной призмы.

§ 10. О нѣкоторыхъ поверхностяхъ вращенія.

Опредѣленія. Если въ плоскости взять двѣ неподвижныя линіи: одну—прямую, а другую—кривую (или же еще одну прямую, но не перпендикулярную къ первой прямой), если, затѣмъ, первую принять за ось вращенія всей плоскости (допущеніе 7-е относительно прямой), то вторая линія при этомъ опишетъ въ пространствѣ нѣкоторую *поверхность вращенія*. (Такъ черт. 285) кривая AB и прямыя CD и EF опишутъ вокругъ оси XX' каждая нѣкоторую поверхность вращенія. Линія, описывающая данную поверхность вращенія, называется ея *образующею*, ось вращенія — *осью поверхности вращенія*; фигура, полученная при пересѣченіи данной поверхности плоскостью, перпендикулярною къ оси, называется *прямымъ сѣченіемъ* поверхности вращенія. Если образующая данной поверхности есть безкопечная прямая, параллельная къ оси вращенія, то данная поверхность называется *цилиндрическою поверхностью вращенія*; если образующая есть безконечная прямая, составляющая съ осью уголъ, отличающійся отъ прямого, то поверхность называется *коническою поверхностью вращенія*; если осью служитъ діаметръ круга, а образующею—полуокружность этого круга, которой концы совпадаютъ съ концами этого діаметра, то поверхность называется *шаровою* или *сферическою поверхностью*. Въ конической поверхности вращенія точка пересѣченія съ ея образующею называется *вершиною конической поверхности вращенія*.



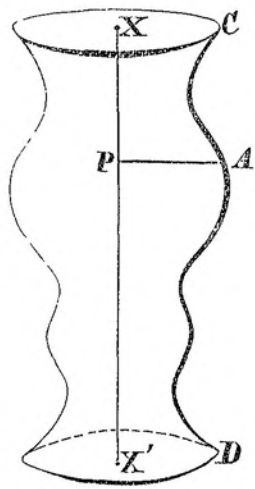
Черт. 285.

Замѣчаніе 1-е. Какъ цилиндрическая, такъ и коническая поверхность вращенія суть поверхности безконечныя и выдѣляютъ

въ пространствѣ не какую-либо конечную, ограниченную со всѣхъ сторонъ, а напротивъ часть пространства не вполнѣ ограниченную.

Замѣчаніе 2-е. Если образующая есть прямая, перпендикулярная къ оси вращенія, то эта образующая при вращеніи опишетъ плоскость (теорема 220), перпендикулярную къ оси и проходящую чрезъ данную образующую. Плоскость однако же не принято причислять къ числу поверхностей вращенія.

Теорема 287. Всякая точка A (черт. 286) образующей CAD данной поверхности вращенія описываетъ, при образованіи данной поверхности, нѣкоторую окружность, радіусъ которой равенъ перпендикуляру AP, опущенному изъ данной точки A образующей на ось XX′ данной поверхности.



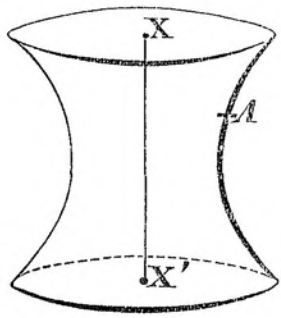
Черт. 286.

Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что какъ ось XX′, такъ и образующая CD, по условію, въ плоскости неподвижны, поэтому и точка A, а равно перпендикуляры AP при вращеніи всей плоскости вокругъ оси XX′ не измѣняютъ своего положенія относительно точекъ той же плоскости. Поэтому перпендикуляръ AP, все оставаясь въ одной и той же плоскости (перпендикулярной къ оси XX′ и проходящей чрезъ точку A) не принимаетъ, кромѣ того, различныхъ значеній, и при данныхъ условіяхъ сохраняетъ, поэтому, одну и ту же длину. Стало-быть, точка P является центромъ окружности, которую описываетъ точка A. Поэтому точка A описываетъ окружность, которой радіусъ равенъ перпендикуляру AP, опущенному изъ данной точки A образующей CD на ось XX′. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Всякая точка образующей цилиндрическую или коническую поверхность, а также всякая точка полуокружности, образующей, при вращеніи, поверхность сферическую, описываетъ нѣкоторую окружность, радіусъ которой равенъ перпендикуляру, опущенному изъ данной точки на ось вращенія.—Дѣйствительно: какъ поверхности цилиндрическая и коническая, такъ и сферическая поверхность суть поверхности вращенія. А потому теорема 287, справедливая относительно поверхности вращенія вообще, справедлива также и для этихъ частныхъ случаевъ.

Теорема 288. Всякое прямое сѣченіе поверхности вращенія, проходящее чрезъ любую точку ея А (черт. 287), есть кругъ, радіусъ котораго равенъ перпендикуляру АР, опущенному изъ точки А на ось поверхности.

Доказательство. Для доказательства этого представимъ себѣ образующую, проходящую черезъ точку А, и примемъ во вниманіе, что точка А при вращеніи описываетъ окружность, плоскость которой перпендикулярна къ оси XX'. Но изъ точки, взятой внѣ прямой, къ этой прямой можно провести только одну перпендикулярную плоскость (теорема 2); слѣдовательно плоскость прямого сѣченія должна совпасть съ плоскостью этой окружности. Стало-быть, прямое сѣченіе данной поверхности вращенія есть одинъ или нѣсколько круговъ, которыхъ радіусы равны перпендикулярамъ, опущеннымъ изъ точекъ пересѣченія образующей съ плоскостью прямого сѣченія на ось XX' этой поверхности. Что и требовалось доказать.



Черт. 287.

Слѣдствіе. Всякое прямое сѣченіе цилиндрической и конической поверхности вращенія, а также поверхности сферической, проведенное чрезъ данную точку данной поверхности, есть кругъ, которой радіусъ равенъ перпендикуляру, опущенному изъ этой точки поверхности на ось ея.—Дѣйствительно: и цилиндрическая поверхность вращенія, и цилидрическая, и сферическая поверхности суть поверхности вращенія. А потому теорема 288, справедливая для всякой поверхности вращенія, справедлива и для этихъ поверхностей.

Теорема 289. Плоскость, проведенная перпендикулярно къ оси вращенія цилиндрической поверхности чрезъ точку, лежащую или не лежащую на поверхности, пересѣкаетъ послѣднюю въ нѣкоторомъ прямомъ сѣченіи.

Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что эта плоскость во всякомъ случаѣ перпендикулярна также и къ образующей (теорема 226), а потому эту послѣднюю пересѣкаетъ въ нѣкоторой точкѣ. Такимъ образомъ плоскость эта проведена чрезъ точку, лежащую на поверхности вращенія. А потому она пересѣкаетъ поверхность въ нѣкоторомъ прямомъ сѣченіи (слѣдствіе теоремы 289). Что и требовалось доказать.

Теорема 290. Цилиндрическая поверхность вращенія есть геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ пространства, находящихся отъ оси въ одномъ и томъ же разстояніи.

Доказательство. Для доказательства этого надо убѣдиться, во 1-хъ, что всѣ точки цилиндрической поверхности вращенія находятся въ одномъ и томъ же разстояніи отъ оси, и во 2-хъ, въ томъ, что всякая точка, не находящаяся на этой поверхности, находится на другомъ отъ оси разстояніи. Въ этомъ можно убѣдиться, принявъ во вниманіе, что образующая цилиндрической поверхности вращенія, при образованіи ея, остается все время параллельна оси поверхности и притомъ остается въ одномъ и томъ же отъ этой оси разстояніи. Всякая же точка, не лежащая на цилиндрической поверхности либо ближе, либо дальше отъ этой оси (въ чемъ учащемуся предоставляется убѣдиться съ помощью доказательства отъ противоположнаго). Стало-быть, цилиндрическая поверхность вращенія есть геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, находящихся отъ оси вращенія въ одномъ и томъ же разстояніи. Что и требовалось доказать.

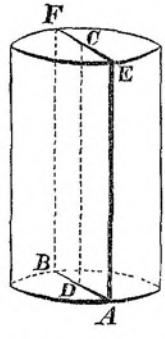
Слѣдствіе 1-е. Если чрезъ любую точку цилиндрической поверхности вращенія провести прямую параллельно къ оси этой поверхности, то эта прямая лежитъ всѣми своими точками на цилиндрической поверхности и совпадаетъ съ образующею ея.— Дѣйствительно: чрезъ всякую точку цилиндрической поверхности вращенія образующая прошла при образованіи этой поверхности; слѣдовательно чрезъ данную точку она тоже прошла; но она параллельна оси поверхности, стало-быть (теорема 205) прямая, проведенная чрезъ какую либо точку цилиндрической поверхности параллельно къ оси ея, находится на этой поверхности и совпадаетъ съ образующею.

Слѣдствіе 2-е. Цилиндрическая поверхность вращенія есть геометрическое мѣсто всѣхъ прямыхъ, параллельныхъ къ оси поверхности и находящихся отъ этой оси на одинаковомъ разстояніи.— Убѣдиться въ этомъ предоставляется учащемуся.

Теорема 291. Плоскость, проведенная чрезъ ось цилиндрической поверхности вращенія пересѣкаетъ эту поверхность и притомъ въ двухъ прямыхъ линіяхъ, изъ которыхъ каждая совпадаетъ съ нѣкоторою образующею этой поверхности.

Доказательство. Для доказательства этого проведемъ два прямыхъ сѣченія этой поверхности; тогда плоскость, проведенная чрезъ ось ея пересѣчетъ плоскости этихъ сѣченій по прямымъ линіямъ (слѣдствіе теоремы 203), совпадающимъ съ діаметрами этихъ сѣченій. Такимъ образомъ плоскость проведенная чрезъ ось цилиндрической поверхности вращенія, имѣетъ съ этою поверхностью четыре общія точки (точки пересѣченія діаметровъ сѣченій съ поверхностью); а потому у этой плоскости и у поверхности

есть еще точки пересѣченія, т. е. плоскость эта пересѣкаетъ цилиндрическую поверхность вращенія. Для того чтобы убѣдиться въ томъ, что линія пересѣченія есть прямая, совпадающая съ образующею цилиндрической поверхности вращенія, примемъ во вниманіе, что, соединивъ точки C и D пересѣченія плоскости съ поверхностью прямою, мы получимъ прямую параллельную и равную прямой AE (лемма 3, стр. 62). Стало быть, эта прямая совпадаетъ съ образующею (слѣдствіе теоремы 290) цилиндрической поверхности вращенія. Что и требовалось доказать.



Черт. 288.

Теорема 292. Если чрезъ двѣ точки A и B цилиндрической поверхности вращенія, не лежащія на одной и той же образующей, провести плоскость, параллельную къ оси, то эта плоскость пересѣчетъ цилиндрическую поверхность въ двухъ прямыхъ, параллельныхъ этой оси.

Доказательство. Для доказательства этого проведемъ чрезъ ось поверхности и одну изъ данныхъ точекъ плоскость, а также чрезъ ось и другую изъ нихъ—другую плоскость; получимъ двѣ прямыя, проходящія чрезъ данныя точки A и B, и эти двѣ прямыя порознь параллельны оси (теорема 291) и другъ другу тоже параллельны (теорема 208); стало-быть, онѣ лежатъ въ одной и той же плоскости параллельной оси. Но чрезъ двѣ точки можно провести только одну плоскость, параллельную къ данной прямой (слѣдствіе 2 теоремы 208). Слѣдовательно плоскость, проведенная, по условію теоремы, чрезъ двѣ точки A и B параллельно къ оси, должна совпасть съ плоскостью, проходящею чрезъ прямыя CD и EF. Но прямыя CD и EF лежатъ также и на цилиндрической поверхности вращенія. Стало-быть, плоскость, проведенная параллельно къ оси цилиндрической поверхности чрезъ двѣ точки послѣдней, не лежащія на одной и той же образующей, пересѣкаетъ поверхность въ двухъ прямыхъ, параллельныхъ къ оси цилиндрической поверхности вращенія. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Если прямая движется въ пространствѣ, оставаясь все время параллельна самой себѣ или (что одно и то же) оставаясь параллельною нѣкоторой неподвижной прямой, то первая прямая описываетъ при этомъ поверхность, которая извѣстна въ наукѣ подъ именемъ *цилиндрической поверхности* вообще. Теорема 289 справедлива относительно всякой цилиндрической поверхности.

Теорема 293. Плоскость, проведенная перпендикулярно къ оси вращенія конической поверхности чрезъ точку, не лежащую на этой поверхности, пересѣкаетъ послѣднюю либо въ одной точкѣ, совпадающей съ вершиною поверхности, либо же въ нѣкоторомъ прямомъ сѣченіи этой поверхности.

Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что образующая по условію не параллельна къ данной плоскости. Стало-быть, образующую эта плоскость должна пересѣчь въ нѣкоторой точкѣ. Если плоскость пересѣчетъ образующую въ вершинѣ данной конической поверхности, то у этой послѣдней и у плоскости только одна общая точка; если же плоскость пересѣчетъ образующую не въ вершинѣ поверхности, а въ какой либо другой точкѣ, то (слѣдствіе теоремы 288) это пересѣченіе будетъ нѣкоторымъ прямымъ сѣченіемъ данной конической поверхности. Что и требовалось доказать.

Опредѣленія. Если представить себѣ неподвижную прямую XX′, а въ одной изъ точекъ ея, напр. въ точкѣ A,—глазъ человѣка, то относительно всякой точки B, лежащей на прямой XX′, говорятъ, что она видима *подъ угломъ равнымъ нулю*; относительно же всякой точки C, лежащей внѣ прямой XX′, говорятъ, что она изъ точки A *видима подъ острымъ угломъ, равнымъ углу CAX* къ прямой XX′, образованнымъ прямою AC съ прямою AX; если же точка C′ взята такъ, что уголъ C′AX болѣе прямого, то говорятъ, что она изъ точки A *видима подъ угломъ C′AX′* (меньшимъ прямого). То же относится ко всякой точкѣ, лежащей въ какомъ угодно мѣстѣ пространства.

Теорема 294. Коническая поверхность вращенія есть геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ видимыхъ изъ ея вершины подъ однимъ и тѣмъ же угломъ, равнымъ острому углу, образованному образующею поверхности съ осью ея.

Доказательство этой теоремы предоставляется, въ качествѣ весьма полезнаго упражненія, учащемуся.

Слѣдствіе 1-ое. Прямая линія, соединяющая вершину конической поверхности вращенія съ какою либо точкою этой послѣдней, лежитъ всѣми своими точками на поверхности и совпадаетъ съ образующею.

Слѣдствіе 2-ое. Коническая поверхность есть геометрическое мѣсто всѣхъ прямыхъ линій, выходящихъ изъ вершины ея и образующихъ съ осью одинъ и тотъ же уголъ.

Теорема 295. Плоскость, проведенная чрезъ ось конической поверхности вращенія пересѣкаетъ послѣднюю въ двухъ

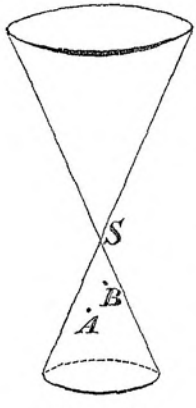
прямыхъ линіяхъ, изъ которыхъ каждая совпадаетъ съ образующею этой поверхности.

Доказательство. Для доказательства этого проведемъ какое либо прямое сѣченіе данной поверхности, которое будетъ пересѣчено плоскостью въ прямой линіи (*слѣдствіе теоремы* 203), совпадающей съ діаметромъ этого сѣченія. Соединивъ концы этого діаметра съ вершиною конической поверхности вращенія получимъ двѣ прямыя, которыя лежатъ въ данной плоскости (допущеніе 3-е о плоскости); кромѣ того, каждая изъ этихъ прямыхъ всѣми точками своими лежитъ на поверхности вращенія (слѣдствіе 1-ое теоремы 295) и совпадаетъ съ образующей. Стало-быть, линіи пересѣченія плоскости, проходящей чрезъ ось конической поверхности вращенія, съ этой поверхностью суть линіи прямыя, изъ которыхъ каждая совпадаетъ съ образующею. Что и требовалось доказать.

Опредѣленіе. *Угломъ при вершинѣ* конической поверхности вращенія называется уголъ, *образованный двумя образующими*, лежащими съ осью поверхности въ одной плоскости.

Теорема 296. Плоскость, проведенная чрезъ вершину конической поверхности вращенія и какія угодно двѣ точки A и B этой поверхности (черт. 289), не лежащія съ вершиною S этой поверхности на одной прямой, пересѣкаетъ поверхность въ двухъ прямыхъ линіяхъ.

Доказательство. Для доказательства этого соединимъ точку S съ точками A и B. Прямыя SA и SB должны находиться и въ плоскости, проведенной чрезъ точки S, A и B (допущеніе 3-е относительно плоскости), и на конической поверхности (слѣдствіе 1-е теоремы 294). Стало-быть, эти прямыя суть линіи пересѣченія данной конической поверхности вращенія и данной плоскости. Что и требовалось доказать.



Черт. 289.

Замѣчаніе 1-е. Если прямая движется въ пространствѣ, проходя чрезъ одну и ту же неподвижную точку, причемъ направленіе движенія не всегда совпадаетъ съ тѣмъ или другимъ изъ собственныхъ направленій данной прямой, то эта прямая описываетъ поверхность, которая извѣстна въ наукѣ подъ именемъ *конической поверхности* вообще. Теорема 293 справедлива для всякой конической поверхности.

Замѣчаніе 2-е. Вообще прямая линія, при всякомъ движеніи своемъ, направленіе котораго не всегда совпадаетъ съ направле-

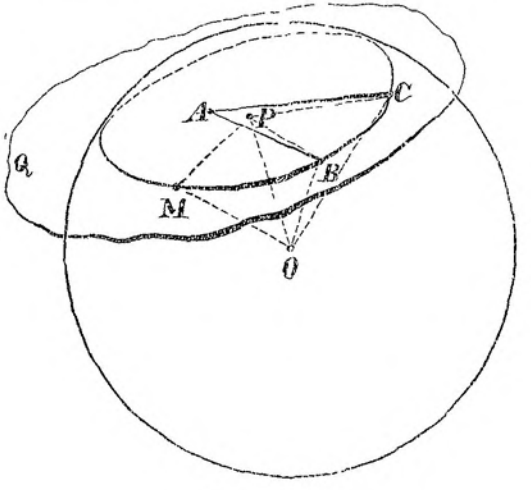
ніями этой прямой, описываетъ нѣкоторую поверхность, которая, въ отличіе отъ поверхностей другого происхожденія, называется *линейчатой поверхностью*. Цилиндрическія и коническія поверхности, а также плоскость, принадлежатъ къ классу поверхностей линейчатыхъ.

Теорема 297. Сферическая поверхность есть геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, находящихся отъ центра ея на одинаковомъ разстояніи.

Доказательство этой теоремы предоставляется учащемуся.

Опредѣленія. Конечная прямая, соединяющая любую точку (шаровой поверхности съ ея центромъ, называется *радіусомъ* или полупоперечникомъ) шаровой поверхности. Конечная прямая, проходящая чрезъ центръ сферической поверхности и соединяющая двѣ точки этой послѣдней, называется *діаметромъ* (или поперечникомъ) шаровой поверхности. Концы одного и того же діаметра называются *противоположными точками* шаровой поверхности.

Теорема 298. Если чрезъ точку A (черт. 290), лежащую внутри шаровой поверхности, провести плоскость, то эта плоскость перссѣчетъ поверхность по нѣкоторой окружности.



Черт. 290.

Доказательство. Для доказательства этого точку A соединимъ съ двумя точками B и C шаровой поверхности, не лежащими съ точкою A на одной прямой; получимъ двѣ прямыя, чрезъ которыя проведемъ плоскость (слѣдствіе теоремы 2-ой). Изъ центра O шаровой поверхности опустимъ на эту плоскость

перпендикуляръ OP, а точку O соединимъ съ точками B и C. Тогда OC = OB, а потому (теорема 232) прямая PC = PB. Отложивъ въ проведенной плоскости прямую PM равную прямой PC, получимъ, что точка M есть точка окружности описанной изъ центра P радіусомъ PC въ проведенной плоскости. Но OM = OB (теорема 231); стало-быть, точка M принадлежитъ также шаровой поверхности. Точно такъ же убѣдимся, что всякая точка окружности, описанной изъ центра P радіусомъ PC въ проведенной нами плоскости, принадлежитъ какъ плоскости, такъ и шаровой поверхности. А потому окружность радіуса PC, описанная изъ центра P въ данной плоскости, есть линія, притомъ единственная (почему?) линія пересѣченія шаровой поверхности съ плоскостью. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Теорему 298 обыкновенно формулируютъ такъ: всякое сѣченіе шаровой поверхности плоскостью есть нѣкоторый кругъ.

§ 11. О круглыхъ тѣлахъ.

Опредѣленія. Если одну изъ сторонъ прямоугольника принять за ось вращенія всего прямоугольника, то противолежащая ей сторона прямоугольника опишетъ нѣкоторую часть нѣкоторой цилиндрической поверхности вращенія, ограничивающую, вмѣстѣ съ двумя кругами, описанными остальными двумя сторонами прямоугольника, тѣло, называемое *прямымъ цилиндромъ вращенія*, или просто *прямымъ цилиндромъ*. При этомъ сторона прямоугольника, принятая за ось вращенія, называется *осью* или *высотою прямого цилиндра*; параллельная къ оси вращенія сторона прямоугольника называется *образующею прямого цилиндра;* два круга, описанные остальными сторонами прямоугольника, называется *основаніями прямого цилиндра*; та часть поверхности прямого цилиндра, которую описала образующая, называется *боковою его поверхностью*; количество пространства, занимаемое цилиндромъ—*объемомъ* его.

Если одинъ изъ катетовъ прямоугольнаго треугольника принять за ось вращенія этого треугольника, то гипотенуза его опишетъ нѣкоторую часть нѣкоторой конической поверхности вращенія, ограничивающую вмѣстѣ съ кругомъ, который описанъ другимъ катетомъ, нѣкоторое тѣло, называемое *прямымъ конусомъ вращенія*, или просто *прямымъ конусомъ*. Катетъ, служившій осью вращенія, называется *осью* или *высотою* даннаго прямого конуса, неподвижная точка гипотенузы *вершиною* прямого конуса, кругъ описанный другимъ катетомъ—его *основаніемъ*, а гипотенуза—

образующей прямого конуса. Та часть поверхности прямого конуса, которую описала его образующая, называется *боковою поверхностью прямого конуса*, количество пространства, занимаемаго конусомъ—объемомъ его.

Если въ прямомъ конусѣ провести прямое сѣченіе, то тѣло, ограниченное двумя кругами и частью боковой поверхности, заключенною между ними, называется *прямымъ усѣченнымъ параллельно основанію конусомъ*. Оба круга, ограничивающіе прямой усѣченный конусъ, называются его основаніями, остальная часть поверхности прямого усѣченнаго конуса—*боковою его поверхностью*. Условимся трапецію, въ которой одна изъ противолежащихъ другъ другу непараллельныхъ сторонъ ея перпендикулярна къ параллельнымъ ея сторонамъ, называть *прямоугольною трапеціею*, а эту сторону *высотою ея*; тогда прямой усѣченный параллельно основанію конусъ можно разсматривать какъ тѣло, происшедшее отъ вращенія прямоугольной трапеціи вокругъ ея высоты; при этомъ противолежащая высотѣ сторона трапеціи можетъ быть принимаема за *образующую* этого прямого усѣченнаго конуса, а ось вращенія—за *ось* или *высоту* его.

Тѣло, ограниченное сферическою поверхностью вращенія, называется *шаромъ* или *сферою*. *Центромъ шара* называется центръ полукруга, отъ обращенія котораго вокругъ его діаметра образовался шаръ; центръ шара находится отъ всѣхъ точекъ его поверхности въ одинаковомъ разстояніи. *Радіусомъ* (или полупоперечникомъ) шара называется конечная прямая, соединяющая центръ шара съ любою точкою его поверхности. *Діаметромъ* (или поперечникомъ) шара называется конечная прямая, проходящая чрезъ центръ шара и соединяющая двѣ точки его поверхности.

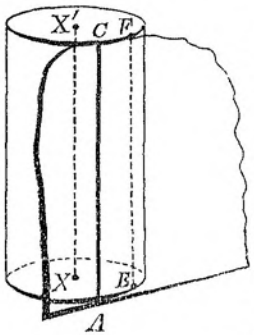
Шаръ, прямой цилиндръ, прямой конусъ и прямой усѣченный конусъ носятъ въ геометріи общее названіе *круглыхъ тѣлъ*.

Теорема 299. Если (выполненіе чертежа предоставляется учащемуся) изъ точки A взятой на окружности основанія прямого цилиндра, провести перпендикуляръ къ основанію цилиндра, по направленію къ другому основанію его, то этотъ перпендикуляръ совпадетъ съ образующею прямого цилиндра.

Доказательство. Для доказательства этого чрезъ ось CD и точку A проведемъ плоскость; эта плоскость пересѣчетъ основанія цилиндра въ параллельныхъ другъ другу прямыхъ AB и EF (теорема 214), а боковую поверхность цилиндра въ прямыхъ AE и BF. Но прямая AE есть образующая цилиндра (теорема 291), а потому она перпендикулярна къ плоскости основанія. А изъ точки, взятой на плоскости, къ этой послѣдней можно

возставить только одинъ перпендикуляръ; слѣдовательно, перпендикуляръ, который возставленъ изъ точки A къ плоскости основанія D, долженъ совпадать съ прямою AE. Стало-быть, этотъ перпендикуляръ совпадаетъ съ образующею даннаго прямого цилиндра. Что и требовалось доказать.

Теорема 300. Если (черт. 291) изъ точки A, взятой на окружности основанія прямого цилиндра, въ плоскости того же основанія провести касательную AB къ этой окружности и затѣмъ черезъ эту касательную и образующую AC, проходящую черезъ точку касанія A, провести плоскость, то эта плоскость съ поверхностью цилиндра имѣютъ общую прямую и при томъ только одну общую прямую, совпадающую съ образующею, черезъ которую проведена эта плоскость.



Черт. 291.

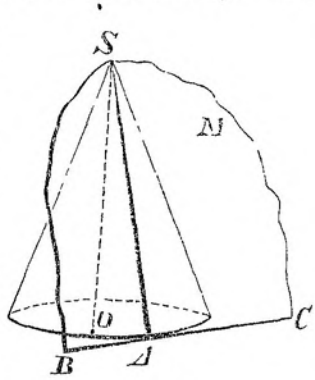
Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что прямая AC принадлежитъ какъ плоскости, такъ и поверхности цилиндра, стало-быть, у данной цилиндрической поверхности и у этой плоскости есть общая прямая, представляющая собою, по условію, образующую, черезъ которую проведена плоскость. Остается доказать, что эта прямая есть единственная общая линія плоскости и боковой поверхности цилиндра. Для доказательства этого предположимъ, что существуетъ еще одна какая-нибудь прямая EF, которая принадлежитъ и поверхности цилиндра, и плоскости; въ такомъ случаѣ, проведенная плоскость должна имѣть съ плоскостью основанія не только общую прямую AB, но еще и общую точку E, и касательная AB имѣла бы съ нижнею окружностью основанія двѣ общія точки A и E. Чего быть не можетъ. Стало-быть, если изъ точки взятой на окружности основанія цилиндра, провести въ плоскости того же основанія касательную къ этой окружности и затѣмъ чрезъ эту касательную и образующую, проходящую чрезъ точку касанія, провести плоскость, то эта плоскость съ поверхностью цилиндра имѣетъ общую и притомъ только одну общую прямую, совпадающую съ образующею, чрезъ которую эта плоскость проведена. Что и требовалось доказать.

Опредѣленіе. Плоскость, имѣющая съ данною цилиндрическою поверхностью вращенія, только одну общую прямую, называется *плоскостью касательною къ данной цилиндрической поверхности вращенія вдоль образующей ея.*

Теорема 301. Если изъ какой либо точки окружности основанія прямого цилиндра провести касательную къ этой окружности и если затѣмъ чрезъ эту касательную провести плоскость перпендикулярную къ основанію цилиндра, то эта плоскость есть плоскость касательная къ поверхности цилиндра.

Доказательство этой теоремы предоставляется, въ качествѣ весьма полезнаго упражненія, учащемуся.

Теорема 302. Если изъ какой нибудь точку A основанія прямого конуса S (черт. 292) провести касательную BC, черезъ эту касательную и образующую, проходящую черезъ точку касанія A провести плоскость, то эта плоскость имѣетъ съ поверхностью конуса общую прямую, и притомъ только одну общую прямую, совпадающую съ образующею конуса, черезъ которую проведена плоскость.



Черт. 292.

Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что прямая SA принадлежитъ какъ плоскости BM, такъ и поверхности конуса S; стало-быть эта прямая есть общая прямая этихъ поверхностей и притомъ совпадаетъ съ образующею, черезъ которую проведена плоскость. Остается доказать, что это есть единственная общая прямая поверхности конуса и плоскости. Для доказательства этого предположимъ, что существуетъ еще одна прямая линія на поверхности конуса, которая принадлежитъ также и плоскости BM; въ такомъ случаѣ плоскость должна была бы пересѣчь плоскость AB въ двухъ точкахъ A и D, и касательная BC имѣла бы съ данною окружностью основанія двѣ общія точки A и D, чего быть не можетъ. Стало-бытъ, прямая SA есть единственная общая прямая поверхности конуса и плоскости проведенной чрезъ касательную къ его основанію и чрезъ образующую, проходящую чрезъ точку касанія.

Опредѣленіе. Плоскость, имѣющая съ данною коническою поверхностью вращенія только одну общую прямую, называется *плоскостью, касательною къ поверхности вращенія вдоль образующей*.

Замѣчаніе. Учащемуся предоставляется формулировать и доказать теорему относительно плоскости касательной къ поверхности конуса, аналогичную теоремѣ 301.

Опредѣленія. Что такое разумѣютъ подъ *величиною поверхности* даннаго тѣла—знаетъ всякій; понятіе это принадлежитъ

къ числу понятій основныхъ, первоначальныхъ, не подлежащихъ опредѣленію. Величина данной поверхности называется иначе *площадью* поверхности или же просто *поверхностью*. Такимъ образомъ слово „поверхность“ употребляется въ двоякомъ смыслѣ: въ смыслѣ границы, отдѣляющей тѣло отъ остального пространства, и въ смыслѣ величины этой границы. Въ этомъ смыслѣ величина *боковой поверхности прямого цилиндра* (или конуса) называется просто *боковою поверхностью* прямого цилиндра (или конуса), а величина поверхности шара—просто его *поверхностью*.

Если въ нижнее основаніе даннаго прямого цилиндра вписать правильный многоугольникъ, изъ вершинъ этого многоугольника провести образующія этого цилиндра до пересѣченія съ окружностью верхняго основанія, эти точки пересѣченія соединить прямыми линіями такъ, чтобы получился вписанный въ верхнее основаніе правильный многоугольникъ, равный и параллельный многоугольнику, вписанному въ нижнее, если, наконецъ, проведенныя образующія принять за ребра нѣкоторой правильной призмы, которой основанія суть вписанные правильные многоугольники, то эта призма называется *правильной призмой, вписанною въ прямой цилиндръ*. Если около нижняго основанія даннаго прямого конуса описать правильный многоугольникъ, изъ вершинъ этого послѣдняго провести перпендикуляры къ плоскости основанія до пересѣченія съ плоскостью верхняго основанія, эти точки пересѣченія соединить такъ, чтобы получился описанный около верхняго основанія правильный многоугольникъ, равный и параллельный многоугольнику, описанному около нижняго основанія, если, наконецъ, принять проведенные перпендикуляры за ребра нѣкоторой правильной призмы, которой основанія суть описанные правильные многоугольники, то эта призма называется *правильной призмой, описанной около даннаго прямого цилиндра*.

Если въ основаніе прямого конуса вписать правильный многоугольникъ, вершины послѣдняго соединить съ вершиною конуса, полученныя образующія принять за ребра правильной многоугольной пирамиды, которой основаніе есть вписанный нами многоугольникъ, то эта пирамида называется *правильною пирамидою, вписанною въ данный прямой конусъ*. Если около основанія прямого конуса описать правильный многоугольникъ, вершины послѣдняго соединить съ вершинами даннаго конуса прямыми линіями, а эти прямыя линіи принять за ребра правильной пирамиды, которой основаніе есть описанный нами многоугольникъ, то эта пирамида называется *правильною пирамидою, описанною около даннаго прямого конуса*.

Допущеніе относительно поверхностей тѣла и частей ихъ.—Относительно поверхности какого угодно тѣла и части этой поверхности въ Геометріи дѣлается слѣдующее допущеніе: величина поверхности всякаго тѣла и любой ея части можетъ быть выражена въ единицахъ мѣры площадей, т. е. въ квадратныхъ единицахъ мѣры.

Допущеніе относительно боковыхъ поверхностей прямого цилиндра и прямого конуса.— Относительно боковыхъ поверхностей прямого цилиндра и конуса дѣлаются слѣдующія допущенія: боковая поверхность цилиндра менѣе боковой поверхности всякой правильной описанной около него, многоугольной призмы, и болѣе боковой поверхности всякой правильной, вписанной въ него, многоугольной призмы; боковая поверхность прямого конуса менѣе боковой поверхности всякой правильной, описанной около него, многоугольной пирамиды и болѣе боковой поверхности всякой правильной, вписанной въ него, многоугольной пирамиды.

Обозначенія. Условимся обозначать:

боковую поверхность прямого цилиндра символомъ	$s_ц$
„ „ „ конуса „	$s_к$
полную поверхность „ цилиндра „	$S_ц$
„ „ „ конуса „	$S_к$
боковую „ описанной призмы или пирамиды	s_o
„ „ вписанной „ „ „	$s_в$
образующую прямыхъ цилиндра и конуса	l
высоту „ „ „ „	h
длину окружности основанія „ „	C
площадь основанія „ „ „	O
периметръ описанной призмы или пирамиды . . .	P
„ вписанной „ „ „ . . .	p
апоѳему описанной въ прямой конусъ пирамиды	A
„ вписанной „ „ „ „	a
радіусъ основанія прямого цилиндра или конуса	r
площадь основанія описанной призмы или пирамиды	Q
„ „ вписанной „ „ „	q
объемъ цилиндра	$V_ц$
„ конуса	$V_к$
„ описанной призмы или пирамиды	V_o
„ вписанной „ „ „	$V_в$ *).

*) Когда сравнивается боковая поверхность конуса съ боковою поверхностью s_0, то символъ s_0 обозначаетъ боковую поверхность описанной *пира-*

Теорема 303. Если въ прямой цилиндръ вписать правильную многоугольную призму съ безконечно-удваивающимся числомъ боковыхъ граней и если около него описать одноименную правильную призму тоже съ безконечно-удваивающимся числомъ сторонъ, то разность между боковыми поверхностями этихъ двухъ призмъ есть величина безконечно-малая.

Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе что

$$s_0 = \text{P} \cdot l, \text{ а } s_в = p \cdot l \text{ (теорема 271)},$$

откуда

$$s_0 - s_в = \text{P} \cdot l - p \cdot l = (\text{P} - p) \cdot l.$$

Но разность $\text{P} - p$ есть величина безконечно-малая (теорема 169). Стало-быть, и разность $s_0 - s_в$ есть величина безконечно-малая (теорема 181). Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1-е. Боковая поверхность прямого цилиндра есть предѣлъ боковой поверхности вписанной въ него, а также предѣлъ описанной около него правильной призмы съ безконечно-удваивающимся числомъ сторонъ.—Дѣйствительно: на основаніи допущенія относительно боковой поверхности цилиндра,

$$s_ц < s_0; \text{ но } s_в = s_в \text{ (аксіома 1-ая)},$$

слѣдовательно (аксіома 9-ая)

$s_ц - s_в < s_0 - s_в$, откуда (лемма 17, стр. 177) $s_ц = \text{пр. } s_в$.

Кромѣ того, извѣстно, что

$$s_0 = s_0 \text{ (аксіома 1-ая); но } s_ц > s_в$$

на основаніи допущенія относительно боковой поверхности цилиндра; стало-быть (аксіома 10-ая),

$s_0 - s_ц < s_0 - s_в$, откуда (лемма 17, стр. 177) $s_ц = \text{пр. } s_0$.

Такимъ образомъ

$$s_ц = \text{пр. } s_в = s_0.$$

Слѣдствіе 2-е. Боковая поверхность прямого цилиндра равна произведенію окружности его основанія на образующую.—Дѣйствительно:

$s_в = p \cdot l$ (теорема 271), откуда $\frac{s_в}{p} = l$, гдѣ l есть постоянная величина; а въ такомъ случаѣ (теорема 185)

$\frac{\text{пр. } s_в}{\text{пр. } p_1} = l$ или (слѣдствіе 1-ое теоремы 303 и 190) $\frac{s_ц}{\text{C}} = l$,

откуда $$s_ц = \text{C} \cdot l, \text{ или } s_ц = 2\pi r \cdot l.$$

мида; когда же рѣчь идетъ о боковой поверхности цилиндра, то s_0 обозначаетъ боковую поверхность описанной *призмы*. Аналогичное относится къ символу $s_в$, а также и символами v_0 и $v_в$.

Слѣдствіе 3-е. Полная поверхность прямого цилиндра равна произведенію изъ окружности его основанія на сумму его образующей съ радіусомъ основанія.—Дѣйствительно:

$$S_ц = s_ц + \pi r^2 + \pi r^2 = 2\pi r.\, l + 2\pi r^2 = 2\pi r.\, (l + r).$$

Теорема 304. Если въ прямой конусъ вписать правильную многоугольную пирамиду съ безконечно-удваивающимся числомъ сторонъ и если около него описать одноименную правильную призму тоже съ безконечно-удваивающимся числомъ сторонъ, то разность между боковыми поверхностями этихъ двухъ призмъ будетъ величина безконечно-малая.

Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что

$$s_o = \frac{\text{P} \,.\, \text{A}}{2}, \text{ а } s_в = \frac{p\,.\,a}{2} \text{ (теорема 272)},$$

откуда

$$s_o - s_в = \frac{\text{P} \,.\, \text{A} - pa}{2};$$

но $\text{P} = p + \alpha$, а $\text{A} = a + \beta$, гдѣ α и β обозначаютъ нѣкоторыя безконечно-малыя величины (почему?). Слѣдовательно

$$s_o - s_в = \frac{(p + \alpha)\,.\,(a + \beta) - pa}{2},$$

откуда, произведя всѣ выкладки во второй части равенства, выведемъ, что разность $s_o - s_в$ есть величина безконечно-малая. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1-е. Боковая поверхность прямого конуса есть предѣлъ боковой поверхности вписанной въ него, а также предѣлъ описанной около него правильной пирамиды съ безконечно-удваивающимся числомъ сторонъ.—Убѣдиться въ этомъ предоставляется учащемуся.

Слѣдствіе 2-е. Боковая поверхность прямого конуса равна произведенію окружности его основанія на половину образующей.—Дѣйствительно:

$$s_o = \frac{\text{P} \,.\, \text{A}}{2} \text{ (теорема 272), откуда } \frac{s_o}{\text{P}} = \frac{\text{A}}{2} = \frac{l}{2},$$

гдѣ l равна образующей конуса (теорема 302) и есть величина постоянная. А потому (теорема 185)

$$\frac{\text{пр. } s_o}{\text{пр. P}} = \frac{l}{2} \text{ или (слѣдствіе 1-е теоремы 304 и 190) } \frac{s_к}{2\pi r} = \frac{l}{2}$$

$$\text{откуда } s_к = \text{C}.\frac{l}{2} = 2\pi r.\,\frac{l}{2}, \text{ или } s_к = \pi r.l.$$

Слѣдствіе 3-е. Полная поверхность прямого конуса равна половинѣ произведенія окружности его основанія на сумму образующей съ радіусомъ этого основанія.—Дѣйствительно:

$$S_к = s_к + \pi r^2 = \pi r l + \pi r^2 = \pi r (l + r) = \frac{2\pi r . (l + r)}{2}$$

Теорема 305. Если въ прямой цилиндръ вписать правильную многоугольную призму съ безконечно-удваивающимся числомъ сторонъ и около него описать одноименную призму тоже съ безконечно-удваивающимся числомъ сторонъ, то разность между ихъ объемами есть величина безконечно-малая.

Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что

$V_o = Q . h$, а $V_в = q . h$ (слѣдствіе 6 теоремы 281),

откуда

$$V_o - V_в = Q . h - q . h = (Q - q) . h.$$

Вторая часть этого неравенства есть величина безконечно-малая (теоремы 189 и 180). Стало-быть, разность $V_o - V_в$ есть величина безконечно-малая. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1-е. Объемъ прямого цилиндра есть предѣлъ объема вписанной въ него, а также предѣлъ объема описанной около него правильной призмы съ безконечно-удваивающимся числомъ сторонъ.—Дѣйствительно:

$V_в < V_o$ (аксіома 1-ая), а $V^в = V_в$ (аксіома 1-ая).

откуда (аксіома 9-ая)

$$V_ц - V_в < V_o - V_в,$$

т. е. (демма 17-ая) разность $V_ц - V_в$ есть величина безконечно-малая, или

$$V_ц = \text{пр. } V_в.$$

Съ другой стороны

$V_o = V_o$ (аксіома 1-ая), и $V_ц > V_в$, (аксіома 1-ая),

откуда (аксіома 10-ая) $V_o - V_ц < V_o - V_в$,

т. е. (лемма 17-ая) разность $V_o - V_ц$ есть величина безконечно-малая, или $V_ц = \text{пр. } V_o$.

Такимъ образомъ

$$V_ц = \text{пр. } V_в = \text{пр. } V_o .$$

Слѣдствіе 2-е. Объемъ прямого цилиндра равенъ произведенію площади его основанія на высоту.—Дѣйствительно:

$$V_o = Q . h, \text{ откуда } \frac{V_o}{Q} = h;$$

а въ такомъ случаѣ (теорема 185) $\frac{V_ц}{O} = h$,

откуда $V_ц = O . h = \pi r^2 . h.$

Теорема 306. Если въ прямой конусъ вписать и около него описать одноименныя правильныя пирамиды съ безконечно-удваивающимся числомъ сторонъ, то разность между объемами этихъ пирамидъ есть величина безконечно-малая.

Доказательство предоставляется, въ качествѣ весьма полезнаго упражненія, учащемуся.

Слѣдствіе 1-е. Объемъ прямого конуса есть предѣлъ объема вписанной въ него, а также предѣлъ объема описанной около него правильной многоугольной пирамиды.

Слѣдствіе 2-е. Объемъ прямого конуса равенъ одной трети произведенія площади его основанія на высоту.

Слѣдствіе 3-е. Объемъ прямого конуса равенъ одной трети объема прямого цилиндра, имѣющаго то же основаніе и ту же высоту, что данный прямой конусъ.—Убѣдиться въ справедливости этихъ трехъ предложеній тоже предлагается учащемуся.

Теорема 307. Боковая поверхность прямого, усѣченнаго параллельно основанію, конуса равна произведенію полусуммы окружностей основанія на длину ея образующей.

Доказательство. Для доказательства этого дополнимъ усѣченный конусъ и обозначимъ боковую поверхность полнаго конуса буквою S, боковую поверхность отсѣченной его части буквою s, боковую поверхность усѣченнаго конуса буквою s', окружность нижняго основанія буквою C, окружность верхняго буквою c, образующую полнаго конуса буквою L, а образующую отсѣченной части буквою l. Тогда (слѣдствіе 1 теоремы 304)

$$S = \frac{C \cdot L}{2},\ s = \frac{c \cdot l}{2},\ \text{а}\ s' = \frac{CL - cl}{2},$$

но (теорема 192)

$$\frac{C}{c} = \frac{R}{r} = \frac{H}{h} = \frac{L}{l},\ \text{откуда}\ L = \frac{C \cdot l}{c}.$$

А въ такомъ случаѣ

$$s' = \frac{\frac{C^2 l}{c} - cl}{2} = \frac{C^2 \cdot l - c^2 l}{2c} = \frac{(C^2 - c^2) \cdot l}{2c}$$

но $C = \frac{c \cdot L}{l}$; стало-быть,

$$s' = \frac{(C+c) \cdot (C-c) \cdot l}{2c} = \frac{(C+c) \cdot \left(\frac{cL}{l} - c\right)}{2c}\, l = \frac{(C+c) \cdot (cL - cl)}{2c}.$$

т. е. $$s' = \frac{(C+c) \cdot (L-l) \cdot c}{2c} = \frac{(C+c) \cdot (L-l)}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Боковая поверхность прямого, усѣченнаго параллельно основанію, конуса равна произведенію окружности средняго сѣченія его на образующую конуса.—Убѣдиться въ справедливости этого предложенія предоставляется учащемуся.

Замѣчаніе. Теорема 307, доказанная выше съ помощью алгебраическихъ подстановокъ, можетъ быть доказано также и съ помощью теоріи предѣловъ на подобіе теоремы 304 и на основаніи теоремы 273.

Теорема 308. Объемъ усѣченнаго параллельно основанію прямого конуса равенъ суммѣ объемовъ трехъ прямыхъ конусовъ, которыхъ высота равна высотѣ даннаго конуса, а основанія соотвѣтственно равны: верхнему основанію его, нижнему основанію и основанію, площадь котораго есть средняя пропорціональная между площадями верхняго и нижняго основаній.

Доказательство. Для доказательства этого дополнимъ конусъ отсѣченною его частью, обозначимъ объемъ полнаго конуса буквою V, объемъ отсѣченной части буквою v, объемъ усѣченнаго конуса буквою X, площадь нижняго основанія буквою O, площадь верхняго буквою o, высоту полнаго конуса буквою H, высоту отсѣченной части буквою h; тогда высота усѣченнаго конуса будетъ равна $H-h$, и кромѣ того (слѣдствіе 2-е теоремы 306)

$$V=\frac{O\,.\,H}{3},\quad v=\frac{o\,.\,h}{3},\quad \text{а}\quad x=\frac{O\,.\,H-oh}{3}.$$

Но

$$\frac{O}{o}=\frac{H^2}{h_2}\ \text{(теорема 192)},\quad \text{откуда}\quad o=\frac{O\,.\,h^2}{H^2}.$$

Вставивъ въ равенство, выражающее величину x, вмѣсто площади o ея величину (аксіома 5-ая), получимъ:

$$x=\frac{O\,.\,H-\frac{O\,h^2}{H_2}\,.\,h}{3}=\frac{OH^3\,O-h^3}{3H^2}=\frac{O\,(H^3-h^3)}{3H^2};$$

но $H^3-h^3=(H+h)\,(H^2+Hh+h^2)$, слѣдовательно

$$x=\frac{O\,.\,(H+h)\,.\,(H^2+Hh+h^2)}{3H^2}=\frac{H+h}{3}\,.\left[O\,.\,\frac{H^2}{H^2}+O\,.\,\frac{Hh}{H^2}+\frac{h^2}{H^2}\right],$$

или

$$x=\frac{H+h}{3}\,.\left[O+O\,.\,\frac{h}{H}+O\,.\,\frac{h^2}{H^2}\right].$$

Но $\dfrac{h^2}{H^2}=\dfrac{o}{O}$, а $\dfrac{h}{H}=\sqrt{\dfrac{o}{O}}$,

такъ что (аксіома 5-ая)

$$x=\frac{H+h}{3}\,.\left[O+O\,.\sqrt{\frac{o}{O}}+o\right]=\frac{H+h}{3}\,.\left[O+\sqrt{\frac{oO^2}{O}}+o\right]$$

т. е.

$$x = \frac{H + h}{3} \cdot \left[O + \sqrt{Oo} + o \right]$$

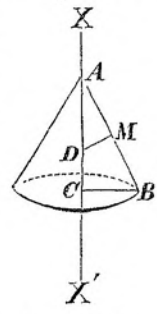
или $x = O.\frac{H + h}{3} + \sqrt{O.o}.\frac{H + h}{3} + o.\frac{H + h}{3}$.

Стало-быть, объемъ прямого усѣченнаго конуса равенъ суммѣ трехъ слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое слагаемое выражаетъ объемъ нѣкотораго прямого конуса; притомъ всѣ эти конусы имѣютъ ту же высоту, что данный усѣченный конусъ, а основанія ихъ порознь равны верхнему и нижнему основаніямъ даннаго усѣченнаго конуса и основанію, площадь котораго есть средняя пропорціональная между площадями этихъ двухъ основаній. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Теорема 308 можетъ быть доказана съ помощью теоріи предѣловъ.

Лемма 20. Если (черт. 293, 294 и 295) на плоскости взята безконечная прямая XX' и конечная, ея вовсе не пересѣкающая, или же пересѣкающая ее въ точкѣ A, прямая AB, и если принять безконечную прямую XX' за ось вращенія всей плоскости, то поверхность, описанная при этомъ конечною прямою AB въ пространствѣ, *равна произведенію проэкціи этой конечной прямой (на ось вращенія)* на длину окружности, которой радіусъ равенъ перпендикуляру, возстановленному изъ средины конечной прямой до пересѣченія съ осью.

Доказательство. При доказательствѣ этого предложенія можно различать три случая: 1) когда одинъ изъ концовъ конечной прямой лежитъ на оси, 2) когда конечная прямая параллельна оси, и 3) когда она не параллельна оси и оба конца ея лежатъ внѣ оси.—Въ первомъ случаѣ (черт. 293) прямая AB опишетъ боковую поверхность прямого конуса, котораго образующая есть прямая AB, а радіусъ основанія—прямая BC. Величина эта поверхности.



Черт. 293.

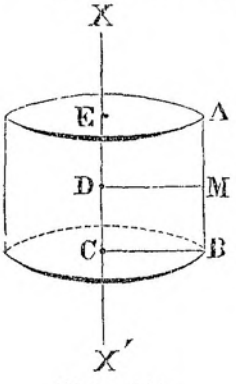
$$s = 2\pi . CB . \frac{AB}{2}.$$

Возставивъ изъ средины M конечной прямой AB перпендикуляръ этой послѣдней до пересѣченія его съ осью XX' въ точкѣ D, получимъ $\triangle$ DMA, который подобенъ треугольнику BAC (слѣдствіе 2-е теоремы 138). А потому AM : AC=MD : CB, т. е. CB . AM=AC . MD или $CB . \frac{AB}{2} = AC . MD$.

Такимъ образомъ (аксіома 5-ая) поверхность

$$s = 2\pi . AC . MD = AC . 2\pi MD.$$

Стало-быть, въ этомъ случаѣ поверхность, описанная конечною прямою AB при вращеніи вокругъ оси XX, дѣйствительно равна произведенію проэкціи (на ось) данной конечной прямой на длину окружности, радіусъ которой равенъ перпендикуляру, возстановленному изъ средины конечной прямой до пересѣченія съ осью.—Во второмъ случаѣ (черт. 294) прямая AB опишетъ боковую поверхность прямого цилиндра, котораго образующая есть прямая AB, а радіусъ основанія—прямая BC. Эта поверхность



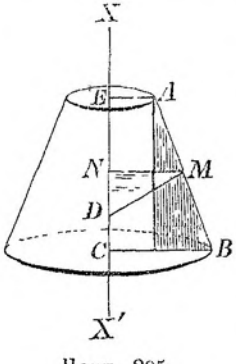
Черт. 294.

$$s = 2\pi \cdot CB \cdot AB = AB \cdot 2\pi \cdot CB.$$

Но прямая AB равна проэкціи EC этой прямой на ось XX′ (теорема 69), а прямая CB равна перпендикуляру MD, возставленному изъ средины M прямой AB до пересѣченія съ осью въ точкѣ D. Слѣдовательно (аксіома 5-ая) и въ этомъ случаѣ

$$s = EC. \ 2\pi \cdot MD.$$

Наконецъ, въ третьемъ случаѣ (черт. 295) прямая AB опишетъ боковую поверхность прямого, усѣченнаго параллельно основанію, конуса, котораго образующая равна AB, радіусы основаній равны прямымъ CB и EA, а радіусъ средняго сѣченія равенъ MN. Эта поверхность



Черт. 295.

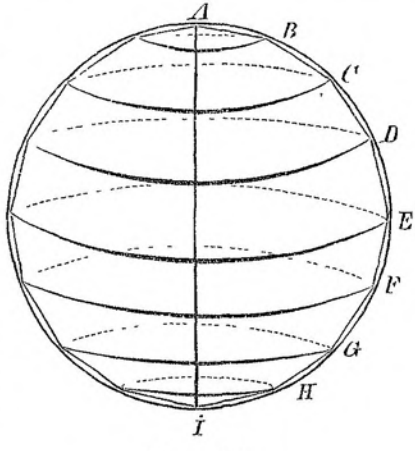
$s = 2\pi \cdot MN \cdot AB$ (слѣдствіе теоремы 307).

Возставивъ изъ средины M прямой AB перпендикуляръ до пересѣченія его съ осью XX′ въ точкѣ D и опустивъ изъ точки A на прямую BC перпендикуляръ AF, получимъ два треугольника: CMN и BAF, которые другъ другу подобны (теорема 142). Въ нихъ

$$MN : AF = MD : AB, \text{ откуда}$$
$$MN \cdot AB = AF \cdot MD.$$

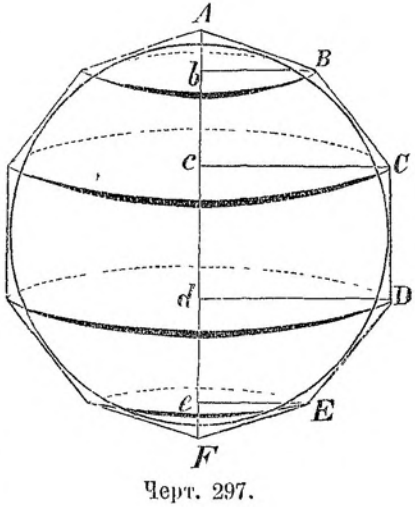
Слѣдовательно (аксіома 5-ая) $s = 2\pi \cdot AF \cdot MD = EC \cdot 2\pi \cdot MD$, т. е. и въ этомъ случаѣ поверхность, описанная конечною прямою AB при вращеніи вокругъ оси XX′, равна произведенію проэкціи (на ось) данной конечной прямой на длину окружности, радіусъ которой равенъ перпендикуляру, возстановленному изъ средины конечной прямой до пересѣченія его съ осью. Что и требовалось доказать.

Опредѣленія. Если вписать въ полуокружность (или описать около нея) ломаную линію, которой крайнія точки совпадаютъ съ концами діаметра (или лежатъ на его продолженіяхъ), то, принявъ діаметръ за ось вращенія всей фигуры, получимъ кромѣ сферы тѣло, которое условимся называть вписаннымъ въ сферу (или описаннымъ около нея) *кубаремъ*. Чертежъ 296 даетъ представленіе о вписанномъ кубарѣ. Если образующая ломаная есть линія описанная около полуокружности, то условимся кубарь называть *описаннымъ около сферы кубаремъ*; если же она есть линія вписанная въ полуокружность, то условимся кубарь называть *вписаннымъ въ сферу кубаремъ*. Если въ описанной образующей ломаной линіи всѣ элементы равны между собою, то кубарь, ею образованный, условимся называть *правильнымъ вписаннымъ кубаремъ*; если же въ описанной образующей ломаной всѣ элементы равны между собою и притомъ крайнія точки ея лежатъ на продолженіяхъ діаметра, то кубарь, ею образованный, условимся называть *правильнымъ описаннымъ кубаремъ*.



Черт. 296.

Теорема 309. Поверхность правильнаго описаннаго около сферы кубаря равна произведенію длины окружности большого круга этой сферы на длину оси кубаря.



Черт. 297.

Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что поверхность кубаря (черт. 297) есть сумма поверхностей, описанныхъ отдѣльными звеньями образующей и что перпендикуляры, возставленные изъ срединъ этихъ звеньевъ, всѣ проходятъ чрезъ центръ окружности. Поэтому, обозначивъ радіусъ сферы буквою R и

опустивъ перпендикуляры Bb, Cc, Dd и Ee на ось AF, получимъ, что (лемма 20) поверхность кубаря

$$S = R \cdot 2\pi, Ab + R \cdot 2\pi \cdot bc + R \cdot 2\pi \cdot cd + R \cdot 2\pi de + R \cdot 2\pi \cdot eF$$

$$\text{или } S = 2\pi R \cdot (Ab + bc + cd + de + eF) = 2\pi R \cdot AF.$$

Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1-е. Поверхность правильнаго вписаннаго въ сферу кубаря равна произведенію длины окружности, радіусъ который равенъ апоѳемѣ образующей, на длину оси, т. е. на длину діаметра сферы.—Дѣйствительно: поверхность вписаннаго въ сферу кубаря (черт. 296) ABCDEFGHI $s = 2\pi \cdot r \cdot AI$, гдѣ буква r обозначаетъ апоѳему ломаной линіи ABCDEFGHI, а прямая AI равна діаметру сферы.

Слѣдствіе 2-е. Разность между поверхностями одноименныхъ описаннаго и вписаннаго въ сферу кубарей, въ которыхъ число элементовъ образующихъ неограниченно возрастаетъ, есть величина безконечно-малая.—Дѣйствительно: обозначивъ ось описаннаго кубаря буквою A, ось вписаннаго одноименнаго кубаря—буквою D, радіусъ сферы буквою R, апоѳему вписанной образующей буквою r, поверхность описаннаго кубаря буквою S, а поверхность вписаннаго буквою s, получимъ

$S = 2\pi R \cdot A$, $s = 2\pi r \cdot D$, откуда $S - s = 2\pi R \cdot A - 2\pi r \cdot D$.

Но $R = r + \alpha$, а $A = D + \beta$, гдѣ α и β обозначаютъ нѣкоторыя безконечно-малыя величины. А потому

$$S - s = 2\pi \cdot (r + \alpha) \cdot (D + \beta) - 2\pi r D.$$

Выполнивъ выкладки и приведеніе во второй части равенства, получимъ, что разность $S - s$ есть величина безконечно-малая (теоремы 181 и 182).

Допущеніе относительно поверхностей вписаннаго въ сферу и описаннаго около нея кубарей.— Относительно кубарей, вписаннаго въ шаръ и описаннаго около него, дѣлается слѣдующее допущеніе: поверхность описаннаго около шара кубаря болѣе поверхности этой сферы, а поверхность кубаря, вписаннаго въ сферу, менѣе поверхности сферы.

Теорема 310. Поверхность шара есть предѣлъ поверхности описаннаго около него кубаря, котораго образующая состоитъ изъ неограниченнаго числа элементовъ, а также предѣлъ поверхности вписаннаго въ него кубаря, котораго образующая состоитъ изъ неограниченнаго числа элементовъ.

Доказательство. Для доказательства этого обозначимъ поверхность шара буквою σ, поверхность правильнаго описаннаго кубаря буквою S, а поверхность вписаннаго въ шаръ кубаря

буквою s, и примемъ во вниманіе, что

$$\sigma < S, \text{ а } s = s, \text{ откуда (аксіома 9-я) } \sigma - s < S - s.$$

Но разность $S - s$ есть величина безконечно-малая (слѣдствіе 2-е теоремы 309); стало-быть и разность $\sigma - s$ есть величина безконечно-малая (лемма 17-я), а потому

$$\sigma = \text{пр. } s.$$

Съ другой стороны,

$S = S$, а $\sigma > s$, откуда (аксіома 10-я) $S - \sigma < S - s$.

Слѣдовательно разность $S - \sigma$ тоже величина безконечно малая, т. е. $\sigma = \text{пр. } S$. Стало-быть

$$\sigma = \text{пр. } s = \text{пр. } S.$$

Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1-е. Поверхность шара равняется длинѣ окружности большого круга этого шара, помноженной на діаметръ шара.— Дѣйствительно: $S = 2\pi \cdot R \cdot A$ (теорема 309), гдѣ буква S обозначаетъ поверхность правильнаго описаннаго кубаря буква R— радіусъ шара, а буква A — ось кубаря. Изъ этого равенства получимъ, что

$$\frac{S}{A} = 2\pi R, \text{ а потому (теорема 185) } \frac{\sigma}{D} = 2\pi R,$$

гдѣ σ обозначаетъ поверхность шара, а D его діаметръ; а изъ послѣдняго равенства получимъ, что

$$\sigma = 2\pi R \cdot D.$$

Слѣдствіе 2-е. Поверхность шара равна учетверенной площади большого круга этого шара.—Дѣйствительно:

$$\sigma = 2\pi \ R \cdot D \text{ (слѣдствіе 1-е теоремы 310)}$$

или (аксіома 5-я)

$$\sigma = 2\pi R \cdot 2R = 4 \cdot \pi R^2.$$

Опредѣленія. *Шаровымъ* (или сферическимъ) *поясомъ* называется часть шаровой поверхности, заключенная между двумя взаимно-параллельными плоскостями, пересѣкающими шаровую поверхность; *шаровымъ* (или сферическимъ) *слоемъ* называется часть шара, заключенная между двумя взаимно-параллельными плоскостями, пересѣкающими шаръ. *Шаровымъ сегментомъ* называется каждая изъ двухъ частей шара, на которыя онъ раздѣляется плоскостью, его пересѣкающею; *боковою поверхностью шароваго сегмента* называется та часть шаровой поверхности, которая ограничиваетъ данный сегментъ; вся поверхность ограничивающая данный шаровой сегментъ, состоитъ изъ двухъ частей: изъ боковой поверхности его и круга, называемаго *основаніемъ*, и называется *полною поверхностью сегмента*, *высотою шароваго пояса* и *шарового слоя* называется разстояніе между параллельными

плоскостями, ограничивающими данный поясъ или слой. *Высотою шароваго* сегмента называется перпендикуляръ, возставленный изъ центра основанія до пересѣченія съ боковою поверхностью сегмента; *вершиною сегмента* называется точка пересѣченія высоты его съ боковою его поверхностью.

Замѣчаніе 1-е. Если провести чрезъ конецъ какого либо радіуса данной шаровой поверхности плоскость, перпендикулярную къ этому радіусу, то эта плоскость имѣетъ съ шаровою поверхностью только одну общую точку, а именно конецъ даннаго радіуса (какъ въ томъ легко убѣдиться на основаніи теоремъ 78 и 298), и такая плоскость называется *касательною* къ данной шаровой поверхности.

Замѣчаніе 2-е. Поверхность шарового сегмента можетъ быть разсматриваема какъ шаровой поясъ, заключенный между основаніемъ сегмента и плоскостью, касательною къ шаровой поверхностью въ вершинѣ сегмента; самый же сегментъ можетъ быть разсматриваемъ какъ шаровой слой, заключенный между основаніемъ сегмента и плоскостью, касательною къ шаровой поверхности въ вершинѣ сегмента.

Теорема 311. Поверхность шарового пояса равна произведенію длины окружности большого круга даннаго шара на высоту этого пояса.

Доказательство. Для доказательства этого возьмемъ полуокружность, діаметръ которой есть прямая CD, и двѣ точки A и B на этой полуокружности; при вращеніи всей фигуры вокругъ оси CD дуга AB опишетъ нѣкоторый шаровой поясъ, высота котораго равна прямой ab, заключенной между проэкціями a и b точекъ A и B на ось CD. Далѣе впишемъ въ дугу AB какую нибудь ломаную съ равными звеньями и опишемъ около нея другую параллельную первой ломаную со столькими же равными между собою звеньями до пересѣченія съ продолженіями прямыхъ aA и bB. Каждая изъ этихъ ломаныхъ опишетъ часть поверхности нѣкотораго кубаря. Распространивъ допущеніе относительно поверхности кубарей описаннаго и вписаннаго на настоящій случай, докажемъ (лемма 20), что поверхность s даннаго пояса есть предѣлъ поверхностей, описанныхъ упомянутыми ломаными. А въ такомъ случаѣ

$$s = 2\pi R \cdot ab.$$

Что и требовалось доказать *).

*) Выполненіе чертежа и деталей доказательства предоставляется учащемуся.

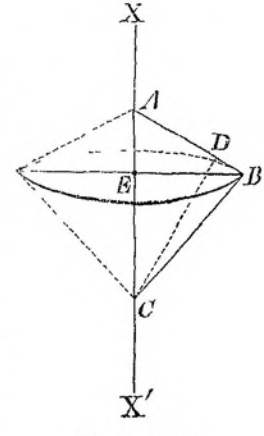
Слѣдствіе 1-е. Боковая поверхность шарового сегмента равна произведенію длины окружности большого круга даннаго шара на высоту сегмента.

Слѣдствіе 2-е. Поверхность двухъ шаровыхъ поясовъ одного и того же шара, въ которыхъ высоты равны между собою, тоже между собою равны.

Слѣдствіе 3-е. Поверхности какихъ угодно двухъ шаровыхъ поясовъ одного и того же шара относятся между собою какъ ихъ высоты.—Убѣдиться въ справедливости этихъ трехъ предложеній предоставляется учащемуся.

Опредѣленія. Если чрезъ вершину треугольника проведена въ его плоскости безконечная прямая, не разсѣкающая треугольника на двѣ части, то условимся такую прямую называть *внѣшнею прямою* или *внѣшнею осью даннаго треугольника.*

Лемма 21. Объемъ тѣла, происшедшаго отъ вращенія треугольника вокругъ внѣшней его оси, равняется одной трети произведенія поверхности, описанной стороною, противолежащею той вершинѣ его, чрезъ которую проходитъ внѣшняя ось, на длину перпендикуляра, опущеннаго изъ этой вершины на противолежащую сторону.



Черт. 298.

Доказательство. При доказательствѣ этой теоремы различаютъ три случая: 1) когда внѣшняя ось проходитъ чрезъ двѣ вершины треугольника, 2) когда она, проходя чрезъ одну вершину треугольника, не параллельна сторонѣ, противолежащей этой вершинѣ и 3) когда она, проходя чрезъ вершину треугольника, параллельна противолежащей сторонѣ.

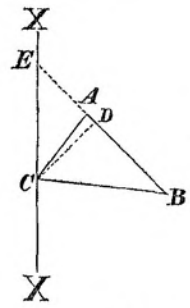
1-й случай. Пусть (черт. 298) внѣшняя ось вращенія XX′ треугольника ABC проходитъ чрезъ двѣ вершины его A и B и пусть перпендикуляръ AD къ сторонѣ AB пересѣкаетъ въ точкѣ D. Тогда треугольникъ ABC при вращеніи своемъ вокругъ оси XX′ опишетъ два прямыхъ конуса, которыхъ образующія суть прямыя AB и BC, а радіусъ общаго основанія равенъ прямой BE, перпендикулярной къ оси. Обозначимъ объемъ всего тѣла символомъ V_{ABC}, и тогда (слѣдствіе 2-е теоремы 306)

$$V_{ABC} = \frac{\pi . BE^2 . AE}{3} + \frac{\pi . BE^2 . EC}{3} = \frac{\pi BE^2}{3} . (AE + EC) = \frac{\pi BE^2 . AC}{3}$$

или

$$V_{ABC} = \frac{.AC\,.BE\,.BE}{3}; \text{ но } AC\,.BE = AB\,.CD,$$

потому что каждое изъ этихъ произведеній выражаетъ удвоенную площадь треугольника ABC (слѣдствіе 3-е теоремы 173); стало-быть,



Черт. 299.

$$V_{ABC} = \frac{\pi AB\,.CD\,.BE}{3} = \frac{(\pi BE\,.AB)\,.CD}{2}.$$

Но произведеніе $\pi BE\,.AB$ выражаетъ величину поверхности, описанной прямою AB. Слѣдовательно, обозначивъ поверхность эту символомъ s_{AB}, получимъ, что

$$V_{ABC} = \frac{s_{AB}\,.CD.}{3}$$ Что и требовалось доказать.

2-й случай. Пусть (черт. 299) внѣшняя ось XX′ треугольника ABC проходитъ чрезъ одну изъ вершинъ его и пусть стороны AB не параллельна внѣшней оси, а перпендикуляръ CD пересѣкаетъ сторону AB въ точкѣ D. Тогда, продолживъ сторону AB до пересѣченія съ осью и сохранивъ прежнія обозначенія, найдемъ, что

$$V_{ABC} = V_{EBC} - V_{EAC} = \frac{s_{EB}\,.CD}{3} - \frac{s_{EA}\,.CD}{3} =$$

$$= \frac{s_{EB} - s_{EA})\,.CD}{3} = \frac{s_{AB}\,.CD}{3}.$$ Что и требовалось доказать.

3-й случай. Пусть (черт. 300) внѣшняя ось треугольника ABC параллельна прямой AB, а перпендикуляръ CD пересѣкаетъ AB въ точкѣ D. Тогда

$$V_{ABC} = V_{EABF} - V_{EAC} - V_{FBC} =$$

$$= \pi FB^2.EF - \frac{\pi EA^2.EC}{3} - \frac{\pi\,.FB^2.CF}{3}$$

или (аксіома 5-я)

$$V_{ABC} = \pi CD^2.AB - \frac{\pi CD^2.AD}{3} - \frac{\pi CD^2 DB}{3} = \pi CD^2.\left(AB - \frac{AD}{3} - \frac{DB}{3}\right)$$

т. е.

$$V_{ABC} = \pi\,CD^2\left(AB - \frac{AD + DB}{3}\right) = \pi CD^2.\left(AB - \frac{AB}{3}\right) =$$

$$= \pi CD^2.\frac{2}{3}AB = \frac{2\pi CD\,.CD\,.AB}{3} = \frac{(2\pi CD\,.AB).CD}{3} =$$

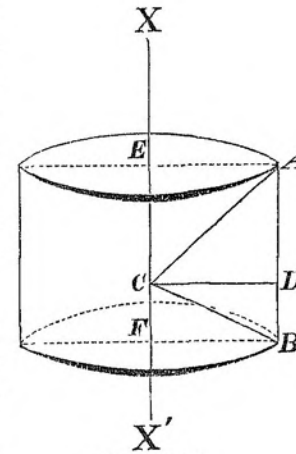
$$\frac{(2\pi FB\,.AB)\,.CD}{3}.$$

Но произведеніе $2\pi FB\,.AB$ выражаетъ боковую поверхность,

описанную прямою AB; стало-быть

$$V_{ABC} = \frac{S_{AB} \cdot CD}{3}.$$ Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Лемма 21 справедлива также и въ томъ случаѣ, когда перпендикуляръ, опущенный изъ вершины, лежащей на оси, пересѣкаетъ противолежащую сторону въ точкѣ, лежащей на продолженіи этой стороны, — въ чемъ убѣдиться предоставляется учащемуся. Но ниже эта лемма примѣняется только къ тѣмъ случаямъ, которые разсмотрѣны выше.



Черт. 300.

Теорема 312. Объемъ правильнаго описаннаго около шара кубаря равенъ одной трети произведенія поверхности кубаря на радіусъ шара.

Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что если объемъ кубаря ABCDEF (черт. 301) обозначить буквою V, то

$$V = V_{ABC} + V_{BOC} + V_{COD} + V_{DOE} + V_{EOF}$$

т. е.

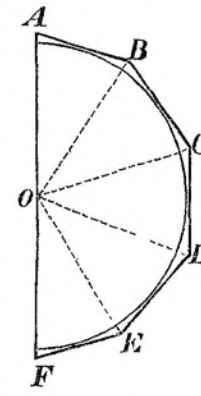
$$V = \frac{S_{AB} \cdot R}{3} + \frac{S_{BC} \cdot R}{3} + \frac{S_{CD} \cdot R}{3} + \frac{S_{DE} \cdot R}{3} + \frac{S_{EF} \cdot R}{3}$$

или

$$V = (S_{AB} + S_{BC} + S_{CD} + S_{DE} + S_{EF}) \cdot \frac{R}{3} = \frac{S_{ABCDEFG} \cdot R}{3}$$

Что и требовалось доказать.

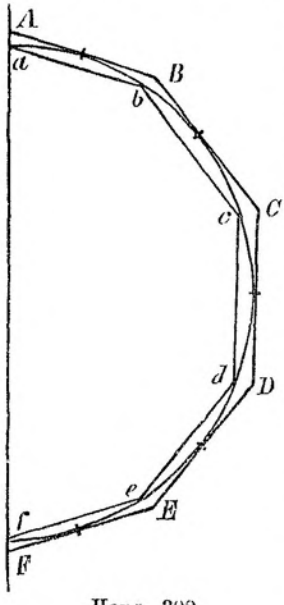
Слѣдствіе 1-е. Разность между объемами одноименныхъ правильныхъ кубарей, описаннаго около шара и вписаннаго въ шаръ, при безконечно-увеличивающемся числѣ звеньевъ образующихъ ломаныхъ, есть величина безконечно-малая.



Черт. 301.

Слѣдствіе 2-е. Объемъ шара есть предѣлъ объема правильнаго кубаря, описаннаго около шара, а также предѣлъ объема правильнаго кубаря, вписаннаго въ шаръ если число звеньевъ образующихъ ломаныхъ, есть величина безконечно возрастающая. (Черт. 302 относится къ доказательству этого предложенія, каковое доказательство предоставляется, какъ и доказательство остальныхъ слѣдствій, учащемуся).

Слѣдствіе 3-е. Объемъ шара равняется одной трети произведенія поверхности шара на его радіусъ.



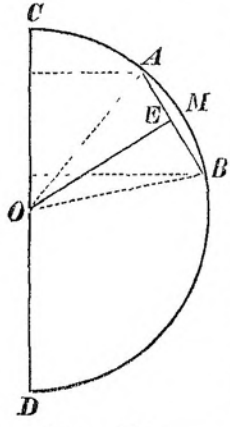
Черт. 302.

Слѣдствіе 4-е. Объемъ шара равняется одной трети учетвереннаго произведенія спрямленія окружности (числа π) на кубъ радіуса шара.

Слѣдствіе 5-е. Объемъ шара равняется одной шестой долѣ произведенія спрямленія окружности (числа π) на кубъ діаметра шара.

Слѣдствіе 6-е. Объемы двухъ шаровъ относятся между собою какъ кубы ихъ радіусовъ или какъ кубы ихъ діаметровъ.—Убѣдиться въ справедливости этихъ шести предложеній предоставляется учащемуся.

Замѣчаніе. Какъ для доказательства теоремъ 191 и 195 (о площади круга), такъ и для доказательства теоремъ 305, 306 и слѣдствій теоремы 312 (объ объемахъ прямого цилиндра, прямого конуса и шара) геометрія не нуждается ни въ какихъ допущеніяхъ. Для доказательства же теоремы 196 (о длинѣ окружности), а равно теоремъ 303, 304 и 310 (о боковой поверхности прямого цилиндра и прямого конуса и поверхности шара) геометрія нуждается въ подобныхъ допущеніяхъ (стр. 187, 277 и 286).



Черт. 303.

Опредѣленія. Условимся называть діаметръ, проходящій чрезъ вершину кругового сектора, но не пересѣкающій дуги этого послѣдняго, *внѣшнимъ діаметромъ сектора*. Если круговой секторъ вращается вокругъ внѣшняго своего діаметра, то при этомъ круговой секторъ описываетъ тѣло, называемое *шаровымъ секторомъ*. Черт. 303 можетъ дать представленіе о шаровомъ секторѣ, описанномъ при вращеніи кругового сектора OAMBO и ограниченномъ частями двухъ коническихъ поверхностей и шаровымъ поясомъ, а также о шаровомъ секторѣ, происшедшемъ при вращеніи кругового сектора OCAO вокругъ одного изъ своихъ радіусовъ; шаровой поясъ, представляющій часть поверхности шарового сектора, наз. *основаніемъ шарового сектора*.

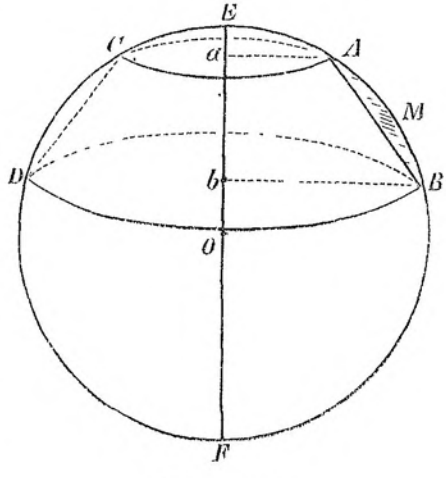
Теорема 313. Объемъ сферическаго сектора равняется одной трети произведенія поверхности основанія шарового сектора на длину радіуса шара.

Доказательство. Для доказательства этого впишемъ въ дугу кругового сектора, при вращеніи образующаго секторъ шаровой, ломаную съ равными между собою звеньями и опишемъ около той же дугу ломаную со столькими же равными между собою звеньями, параллельными звеньямъ вписанной ломаной. Съ увеличеніемъ числа звеньевъ, разность между объемами тѣлъ описанныхъ фигурами, которыя ограничены этими ломаными и крайними радіусами, становится величиною безконечно-малою (ср. теорему 309), а объемъ шарового сектора — предѣломъ объемовъ этихъ тѣлъ. Такимъ образомъ убѣдимся (подробности доказательства предоставляются учащемуся), что если поверхность основанія шарового сектора обозначенъ буквою s, объемъ его—буквою v, а радіусъ шара буквою R, то

$$v = \frac{s \cdot R}{3}.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 314. Объемъ тѣла, происшедшаго при вращеніи кругового сегмента вокругъ діаметра, лежащаго внѣ этого сегмента, равенъ шестой долѣ объема цилиндра, у котораго радіусъ основанія равенъ хордѣ сегмента, а высота—ея проэкціи на ось вращенія.



Черт. 304.

Доказательство. Для доказательства (черт. 304) этого соединимъ концы кругового сегмента AMBA съ центромъ полукруга O и примемъ во вниманіе, что этотъ сегментъ представляетъ собою разность между круговымъ секторомъ AOBMA и треугольникомъ AOB, а объемъ v тѣла, образованнаго при вращеніи сегмента AMBA вокругъ оси EF, есть разность между объемомъ v_1 сферическаго сектора, описаннаго при вращеніи кругового сектора AOBMA вокругъ оси EF, и объемомъ v_2 тѣла, описаннаго при вращеніи треугольника

АОВ вокругъ той же оси. Но (теорема 313 и лемма 21)

$$v_1 = \frac{2\pi R^2 . ab}{3}, \text{ а } v_2 = \frac{2\pi . OE^2 . ab}{3},$$

гдѣ ab есть проэкція хорды АВ на ось, а ОЕ есть перпендикуляръ, опущенный изъ центра О на хорду АВ. А потому (аксіома 5-я)

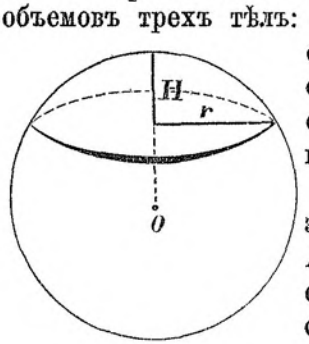
$$v = \frac{2\pi R^2 . ab}{3} - \frac{2\pi . OE^2 . ab}{3} = \frac{2\pi . ab}{3} . (R^2 - OE^2);$$

но $R^2 - OE^2 = EB^2$ (Пиѳагорова теорема), т. е. $R^2 - OE^2 = \frac{AB^2}{4}$. Стало-быть (аксіома 5-я),

$$v = \frac{2\pi . ab . AB^2}{3.4} = \frac{\pi AB^2 . ab}{6};$$

вторая часть этого равенства выражаетъ шестую долю объема цилиндра, у котораго радіусъ основанія равенъ хордѣ АВ даннаго сегмента, а высота—проэкціи этой хорды на ось (слѣдствіе 2-ое теоремы 305). Что и требовалось доказать.

Теорема 215. Объемъ сферическаго слоя равенъ суммѣ объемовъ трехъ тѣлъ: шара, котораго діаметръ равенъ высотѣ слоя, и двухъ цилиндровъ, у которыхъ высота одна и та же и равна половинѣ высоты слоя, а основанія порознь равны основаніямъ его.



Черт. 305.

Доказательство. Для доказательства этого примемъ во вниманіе, что объемъ слоя ABCD (черт. 304) равенъ суммѣ двухъ объемовъ: объема v_1 усѣченнаго конуса, основанія котораго равны основаніямъ слоя, и объема v_2 тѣла, описаннаго сегментомъ AMDA при вращеніи вокругъ діаметра EF. Поэтому, обозначивъ проэкцію хорды АВ на ось буквою Н, а радіусы основаній слоя буквами r_1 и r_2, получимъ, что (теоремы 308 и 314)

$$V = \frac{\pi H}{3}\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right) + \frac{\pi . AB^2 . H}{6}$$

или

$$V = \frac{\pi . H}{6}\left(2r_1^2 + 2r_2^2 + 2r_1 r_2 + AB^2\right).$$

Но, проведя перпендикуляръ ВЕ изъ точки В на прямую ВА, получимъ (Пиѳагорова теорема):

$$AB^2 = (r_1 - r_2)^2 + H^2 = r_1^2 - 2r_1 r_2 + r_2^2 + H^2.$$

а потому (аксіома 5-я)

$$V = \frac{\pi \cdot H}{6}\left(2r_1^2 + 2r_2^2 + 2r_1r_2 + r_1^2 - 2r_1r_2 + r^2{}_2 + H^2\right)$$

$$V = \pi\frac{H}{6}\left(3r^2{}_1 + 3r^2{}_2 + H_2\right) = \frac{\pi \cdot H^3}{6} + \pi . r^2{}_1\frac{H}{2} + \pi r^2{}_2\frac{H}{2}$$

Вторая часть этого равенства выражаетъ (слѣдствіе 5-е теоремы 312 и слѣдствіе 2 теорема 305) сумму объемовъ трехъ тѣлъ: шара, діаметръ котораго равенъ H, двухъ цилиндровъ, высота которыхъ равна половинѣ высоты слоя, а основанія порознь равны основаніямъ его. Что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1-ое. Объемъ сферическаго сегмента равенъ суммѣ объемовъ двухъ тѣлъ: шара, діаметръ котораго равенъ высотѣ сегмента и цилиндра, высота котораго равна половинѣ высоты слоя, а основаніе—основанію его.—Убѣдиться въ этомъ предоставляется учащемуся.

Слѣдствіе 2-ое. Объемъ сферическаго сегмента равенъ объему цилиндра, въ которомъ радіусъ равенъ высотѣ сегмента, а высота равна разности между радіусомъ сферы и одною третью высоты сегмента.—Дѣйствительно:

$$V = \frac{\pi H^3}{6} + \pi r^2 . \frac{H}{2}$$

гдѣ H обозначаетъ высоту сегмента, r радіусъ его основанія. Но (слѣдствіе 2-ое теоремы 144)

$$r^2 = (2R - H) . H,$$

гдѣ R обозначаетъ радіусъ шара (черт. 305), а потому (аксіома 5-я)

$$V = \frac{\pi . H^3}{6} + \pi\left(2R - H\right) . H . \frac{H}{2}.$$

Выполнивъ выкладки (что предоставляется учащемуся), получимъ, что

$$V = \pi H^2 \cdot \left(R - \frac{H}{3}\right).$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЯ СТАТЬИ.

1. Объ аксіомахъ.

Изъ перечисленныхъ во Введеніи (VII) аксіомъ всѣ, кромѣ первыхъ пяти, могутъ быть доказаны на основаніи остальныхъ; при этомъ особенныя услуги при доказательствахъ оказываетъ аксіома 5-ая.

Аксіома 6-ая. Если $a=b$, и $c=b$, то $a=c$. — Дѣйствительно: $a=b$ и $c=b$; въ такомъ случаѣ (аксіома 4) и $b=c$, а потому (аксіома 5) $a=c$.

Аксіома 7-ая. Если $a>b$, а $b>c$, то $a>c$. — Дѣйствительно: $a>b$, а $b>c$, въ такомъ случаѣ $a=b+d$, а $b=c+e$ или (аксіома 5) $b=c+e+d$,, откуда аксіома 1-ая) $a>c$.

Аксіома 8-ая Если $a=b$, и $c=d$, то $a+c=b+d$ и $a-c=b-d$. — Дѣйствительно: $a=b$, а $c=d$; и $a+c=a+c$, откуда (аксіома 5) $a+c=b+d$. Точно также убѣдимся, что $a-b=c-d$.

Аксіома 9-ая. Если $a>b$, а $c=d$, то $a+c>b+d$, и $a-c>b-d$. — Дѣйствительно: $a>b$, а $c=d$; въ такомъ случаѣ $a=b+k$ и (аксіома 8-ая)

$a+c=b+k+d=(b+d)+k$ (аксіома 2-ая), откуда (аксіома 1-ая) $a+c>b+d$. Точно такъ же убѣдимся, что $a-c>b-d$.

Аксіома 10-ая. Если $a=b$, а $c>d$, то $a-c<b-d$. — Дѣйствительно: $a=b$, а $c>d$; въ такомъ случаѣ $c=d+k$, и (аксіома 8-ая) $a-c=b-(d+k)=b-d-k=(b-d)-k$, откуда (аксіома 2-ая) $a-c<b-d$.

Аксіома 11-ая. Если $a=b$, то $a:n=b:n$. — Дѣйствительно: $a=b$, въ такомъ случаѣ $a=nk$ и (аксіома 5-ая) $b=nk$, откуда

$$k=\frac{a}{n} \text{ или (аксіома 4-ая) } \frac{a}{n}=k,$$

а также

$$k=\frac{b}{n} \text{ (или аксіома 4-ая) } \frac{b}{n}=k,$$

откуда (аксіома 6-ая)

$$\frac{a}{n}=\frac{b}{n}$$

Аксіома 12-ая. Если $a>b$, то $a:n>b:n$. — Дѣйствительно: $a>b$;

въ такомъ случаѣ $a = nk$, и $a = b + c$, откуда (аксіома 5-ая) $nk = b + c$; т. е.

$$k = \frac{b+c}{n} = \frac{b}{n} + \frac{c}{n}.$$

Стало-быть,

$$k > \frac{b}{n} \text{ или (аксіома 5-ая) } \frac{a}{n} > \frac{b}{n}.$$

Аксіома 13-ая. Если $a = b$, а $c = d$, и всѣ эти величины однородны, то $a : c = b : d$. — Дѣйствительно: $a = b$, и $c = d$; въ такомъ случаѣ либо (аксіома 3) $a = c$ и $b = d$, либо же $a \gtrless c$ и $b \gtrless d$. Въ первомъ случаѣ $a : b = 1$, и $b : d = 1$, стало-быть (аксіома 5-ая) $a : b = c : d$. Во второмъ же случаѣ

$$a = mc \text{ и (аксіома 5-ая) } b = mc = md,$$

т. е.

$$a = mc \text{ и } b = md, \text{ откуда } a : c = m \text{ и } b : d = m$$

или (аксіома 6-ая)

$$a : c = b : d.$$

Изъ 13-ти аксіомъ, перечисленныхъ во Введеніи, восемь, такимъ образомъ, представляются теоремами, которыя только по причинѣ своей очевидности принимаются безъ доказательства. Остальныя же причисляются къ разряду аксіомъ какъ потому, что онѣ суть истины крайне очевидныя, такъ и потому, что справедливость ихъ доказана быть не можетъ. Изъ нихъ первая устанавливаетъ тожество величины съ самой собою, вторая есть аксіома сложенія, третья устанавливаетъ три возможныхъ соотношенія двухъ значеній одной и той же величины, четвертая же устанавливаетъ примѣненіе терминовъ: равенъ, больше и меньше.

2. О взаимной зависимости теоремъ.

Условимся совокупность четырехъ предложеній, изъ которыхъ одно есть прямое, другое — обратно ему, третье противоположно прямому, а четвертое обратно третьему, называть *взаимно-зависящими* предложеніями. Всякія четыре взаимно-зависящія предложенія могутъ быть подведены подъ слѣдующую схему:

прямое предложеніе: при условіи A, существуетъ B;
обратное прямому: при условіи B, существуетъ A;
противоположное прямому: при условіи не-A, существуетъ не-B;
обратное противоположному: при условіи не-B, существуетъ не-A.

Условимся для краткости называть эти предложенія по порядку: предложеніемъ первымъ, предложеніемъ вторымъ, третьимъ и четвертымъ. Относительно совокупности взаимно-зависящихъ предложеній справедливъ слѣдующій рядъ теоремъ чисто-логическаго характера:

Теорема I. Всякое третье предложеніе есть предложеніе четвертое, если второе принять за первое. — *Дѣйствительно: принявъ предложеніе* вида: «при условіи B, существуетъ A» за прямое (т. е. за первое), по-

лучимъ, что четвертое по отношенію къ этому прямому гласитъ такъ: при условіи не-A, существуетъ не-B, что совершенно тожественно съ третьимъ предложеніемъ, если за первое принято предложеніе вида: при условіи A, существуетъ B.

Теорема II. Всякое четвертое предложеніе есть третье, если второе принято за первое. — Дѣйствительно: принявъ предложеніе вида: при условіи B, существуетъ A, за прямое (т. е. за первое), получимъ что третье по отношенію къ этому первому будетъ гласить: при условіи не-B, существуетъ не-A, что совершенно тожественно съ четвертымъ предложеніемъ, если за первое принято предложеніе вида: при условіи A, справедливо B.

Замѣчаніе. Иными словами эти двѣ теоремы выражаютъ слѣдующее: 1) Противоположное прямому предложенію является по отношенію къ предложенію обратному (тому же прямому) четвертымъ, и 2) предложеніе обратное противоположному тожественно съ предложеніемъ противоположнымъ обратному одного и того же предложенія.

Теорема III. Если справедливо первое предложеніе, то справедливо и четвертое, и обратно: если справедливо четвертое, то справедливо и первое.—Дѣйствительно: пусть справедливо предложеніе вида: при условіи A, существуетъ B. Въ такомъ случаѣ при условіи не-B не можетъ существовать A, ибо если бы существовало A, то существовало бы B, а не не-B. Стало-быть, при условіи не-B, существуетъ не-A. Точно такъ же (способомъ приведенія къ нелѣпости) доказывается и обратное.

Слѣдствіе. Если первое предложеніе доказано, то четвертое можетъ быть принято безъ доказательства, и обратно: если четвертое доказано, то первое можетъ быть принято безъ доказательства.

Теорема IV. Если справедливо второе предложеніе, то справедливо третье, и обратно: если справедливо третье, то справедливо и второе. — Доказательство основано на теоремахъ I и III.

Слѣдствіе. Если второе предложеніе доказано, то третье можетъ быть принято безъ доказательства, и обратно: если третье доказано, то второе можетъ быть принято безъ доказательства.

Замѣчаніе. Если доказаны предложенія: 1-ое и 2-ое, или 1-ое и 3-е, или 2-ое и 4-ое, или же наконецъ, 3-е и 4-ое, то доказаны и всѣ остальныя изъ четырехъ взаимно-зависящихъ предложеній. При этомъ справедливость 1-го или 4-го предложеній не влечетъ засобою справедливости 2-го или 3-го, и обратно: справедливость 2-го или 3-го предложенія не влечетъ за собою справедливости 1-го или 4-го.

Теорема V. Если первое и третье предложенія одновременно справедливы, то условіе перваго предложенія достаточно и необходимо для существованія заключенія его.—Дѣйствительно: пусть справедливы оба слѣдующихъ предложенія: 1) при условіи A, существуетъ B, и 2) при условіи не-A существуетъ не-B. Тогда условіе A достаточно для существованія B, на основаніи перваго условія (при условіи A, существуетъ B) и необходимо для существованія B, на основаніи второго условія (при условіи не-A, существуетъ не-B).

Слѣдствіе. Если первое и второе предложеніе справедливы, то условіе перваго предложенія достаточно и необходимо для существованія заключенія его.—Дѣйствительно въ этомъ случаѣ (теорема IV) справедливо и третье предложеніе.

Замѣчаніе. Если въ данной теоремѣ нѣсколько условій: A, B, C и т. д. и одно заключеніе M, то обратныхъ этой теоремѣ предложеній столько, сколько въ ней условій, при чемъ въ каждомъ изъ нихъ заключеніе M становится на мѣсто одного изъ условій, а это послѣднее становится заключеніемъ. Учащемуся предлагается въ качествѣ весьма полезнаго упражненія, подробно разсмотрѣть одну изъ теоремъ съ многочисленными условіями и изучить всѣ предложенія, обратныя ей.

3. О теоріи параллельныхъ линій.

Всѣ попытки построенія теоріи параллельныхъ линій безъ какого либо постулата привели только къ убѣжденію, что это невозможно. Исходя изъ треугольника, славный французскій геометръ *Лежандръ* (Legendre, род. 1752, † 1833) доказалъ, что сумма угловъ треугольника не можетъ быть больше 180^0; но при этомъ онъ принялъ безъ доказательства, что если вершину треугольника соединить прямою съ срединою противолежащей стороны и на продолженіи этой прямой отложить отрѣзокъ равный этой прямой, то конецъ этого отрѣзка лежитъ внутри внѣшняго угла образованнаго раздѣленною пополамъ стороною треугольника съ продолженіемъ одной изъ остальныхъ сторонъ его. Кромѣ того, Лежандромъ доказано, что если сумма угловъ хоть въ одномъ треугольникѣ равна 180^0, то она равна этой величинѣ во всякомъ треугольникѣ. Оставалось только доказать: либо, что сумма угловъ какого нибудь треугольника равна 180^0, *либо же, что сумма угловъ всякаго треугольника не можетъ быть меньше*, чѣмъ 180^0. Первое не удалось сдѣлать, а второе предложеніе можетъ быть, независимо отъ теоріи параллельныхъ линій, доказано только въ томъ случаѣ, если принять безъ доказательства, что чрезъ всякую точку, взятую внутри угла, можно провести такую прямую, которая пересѣкла бы обѣ стороны этого угла). Такимъ образомъ, вмѣсто Евклидова или ему равносильнаго постулата, въ этомъ случаѣ принимаются безъ доказательства два другихъ допущенія. Должно при этомъ замѣтить, что если бы кому либо удалось, безъ помощи параллельныхъ линій, доказать, что сумма внутреннихъ угловъ прямолинейнаго треугольника величина постоянная, то вся теорія этихъ линій могла бы быть построена безъ постулата. Но, на основаніи новѣйшихъ работъ въ этомъ направленіи, можно утверждать, то построеніе необходимой для Геометріи теоріи параллельныхъ линій безъ всякаго постулата невозможно **).

*) См. Baltzer, Elemente der Mathematik. Lpz

**) Особенно интересовались теоріею параллельныхъ линій, кромѣ Лежандра, слѣдующіе ученые: знаменитый *Гауссъ* (1777 — 1855), славный русскій геометръ *Ник. Ив. Лобачевскій* (род. въ Нижнемъ Новгородѣ въ 1793 г., скончался въ Казани въ 1856 г.), венгерскіе геометры *Больаи* (отецъ и сынъ) и нѣмецкій математикъ *Риманъ* (1826—1866). На русскомъ языкѣ, кромѣ сочиненій Лобачевскаго, имѣется по теоріи параллельныхъ линій весьма обстоятельная монографія почившаго въ 1889 г. академика *В. Я Буняковскаго* (род. въ 1809 г.) въ «Ученыхъ запискахъ С.-Петербургской Императорской Академіи наукъ» за 1853 годъ.

4. О пропорціональныхъ величинахъ въ геометріи.

При доказательствѣ теоремъ, относящихся до пропорціональности двухъ величинъ (теоремы 119, 131, 169, 255 и 274), разсматриваются два случая: когда значенія одной величины соизмѣримы другъ съ другомъ и когда они другъ съ другомъ не соизмѣримы; въ послѣднемъ случаѣ мы прибѣгали къ способу доказательства отъ противоположнаго. При этомъ принималось безъ доказательства, что отношеніе двухъ несоизмѣримыхъ значеній одной и той же величины существуетъ, хотя оно и не можетъ быть точно выражено ни видѣ цѣлаго числа, ни въ видѣ дроби съ цѣлыми числителемъ и знаменателемъ. На тотъ же вопросъ можно посмотрѣть и съ точки зрѣнія теоріи предѣловъ.—Дѣйствительно: пусть даны два значенія A_1 и A_2 одной и той же величины и пусть эти значенія несоизмѣримы одно съ другимъ; тогда, раздѣливъ A_2 на опредѣленное число n равныхъ между собою частей, получимъ, что

$$A_2 = \frac{nA_2}{n}, \text{ и кромѣ того, } \frac{mA_2}{n} < A_1 < \frac{m+1}{n} A_2$$

гдѣ m есть нѣкоторое опредѣленное число, зависящее въ каждомъ частномъ случаѣ отъ того, какъ велико число n. Такъ какъ разность

$$\frac{m+1}{n} A_2 - \frac{m}{n} \cdot A_2 = \frac{1}{n} A_2,$$

и, съ увеличеніемъ числа n, становится величиною безконечно-малою, то

$$A_1 = \text{пр.} \frac{m}{n} \cdot A_2 = \text{пр.} \frac{m+1}{n} \cdot A_2.$$

Поэтому можно условиться называть отношеніемъ величины A_1 къ величинѣ A_2, если таковое существуетъ, предѣлъ, къ которому стремится отношеніе

$$\frac{m}{n} \cdot A_2 : \frac{nA_2}{n} = \frac{m}{n}.$$

Въ такомъ случаѣ всѣ теоремы, относящіяся къ пропорціональности двухъ величинъ, могутъ быть доказаны съ помощью теоріи предѣловъ, что предоставляется выполнить учащемуся.—Хотя при этомъ не дѣлается высказаннаго допущенія о существованіи отношенія двухъ несоизмѣримыхъ значеній одной и той же величины, но при этомъ подобное допущеніе лежитъ въ самой основѣ опредѣленія отношенія двухъ несоизмѣримыхъ значеній одной и той же величины.

5. Нѣкоторыя свойства треугольника.

Кромѣ основныхъ свойствъ треугольника, разсматриваемыхъ въ курсѣ „Планиметріи“, въ распоряженіи науки находится значительное количество теоремъ о треугольникѣ, изъ которыхъ слѣдующія особенно замѣчательны и достойны вниманія. Предоставляется учащемуся по указаніямъ, сдѣланнымъ въ скобкахъ относительно теоремъ, на которыхъ основано доказательство ихъ, выполнить какъ чертежи, такъ и самыя доказательства.

Теорема I. Сумма квадратовъ двухъ сторонъ треугольника равна

удвоенному квадрату медіаны *) третьей стороны, увеличенному на удвоенный квадратъ половины этой послѣдней. (Пиѳагорова теорема).

Слѣдствіе 1-е. Во всякомъ четыреугольникѣ сумма квадратовъ его сторонъ равна суммѣ квадратовъ обѣихъ его діагоналей, увеличенной на учетверенный квадратъ прямой, соединяющей средины діагоналей.

Слѣдствіе 2-е. Во всякомъ параллелограммѣ сумма квадратовъ его діагоналей равна суммѣ квадратовъ всѣхъ четырехъ его сторонъ.

Теорема II. Разность квадратовъ двухъ сторонъ треугольника равна удвоенному произведенію третьей стороны на проэкцію ея медіаны на ту-же сторону. (Слѣдствія 2-е и 3-ье теоремы 145).

Теорема III. Произведеніе двухъ сторонъ треугольника равно квадрату биссектрисы угла, ими образованнаго, увеличенному на произведеніе отрѣзковъ, образованныхъ биссектрисою на третьей сторонѣ. (Теорема 152, теорема 122 и слѣдствіе 1-ое теоремы 138).

Теорема IV. Если стороны треугольника обозначены буквами a, b и c, высота, опущенная на сторону a изъ противолежащей ей вершины A, обозначена символомъ h_a, а полусумма всѣхъ трехъ сторонъ треугольника—буквою p, то

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p\,(p-a)\,.\,(p-b)\,.\,(p-c)}$$

Дѣйствительно (выполненіе чертежа предоставляется учащемуся) $h^2_a = b^2 - CD^2$; но $CD = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$ (слѣдствіе 2ое теоремы 145) откуда

$$h^2_a = b^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2b-(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}$$

$$= \frac{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}{4a^2} = \frac{[(a+b)^2-c^2]\,.\,[c^2-(a-b)^2]}{4a^2}$$

$$= \frac{(a+b+c)\,.\,(a+b-c)\,.\,(c+a-b)\,(c+b-a)}{4a^2}.$$

Отсюда, подставивъ вмѣсто $a+b+c$ величину $2p$, а вмѣсто остальныхъ множителей числителя—величины: $2p-2c$, $2p-2b$ и $2p-2a$, получимъ, по выполненіи выкладокъ, формулу:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

Точно такъ же

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p\,(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ и } h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p\,(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

---

*) Въ геометріи принято полагать, что сторонѣ a противолежитъ вершина A сторонѣ b—вершина B, сторонѣ c—вершина C; кромѣ того, проэкція стороны на сторону a пусть будетъ CD. — Медіаной треугольника называется прямая, выходящая изъ вершины его и раздѣляющая противолежащую ей сторону пополамъ.

Слѣдствіе. Если стороны треугольника равны a, b и c, то площадь его

$$\Delta = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\cdot(p-c)},$$

гдѣ буква p обозначаетъ полусумму его сторонъ.

Теорема V. Произведеніе двухъ сторонъ треугольника равно произведенію діаметра круга, описаннаго около треугольника, на высоту, опущенную изъ точки ихъ пересѣченія на третью сторону. (Слѣдствіе 1-ое теоремы 138).

Слѣдствіе. Если a, b и c обозначаютъ стороны треугольника, а R радіусъ круга, около него описаннаго, то

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\cdot(p-c)}},$$

гдѣ p обозначаетъ величину $\frac{a+b+c}{2}$.

Дѣйствительно:

$$b\cdot c = 2R\cdot h_a\,;\ \text{но}\ h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)};$$

слѣдовательно

$$bc = 2R\cdot\frac{2}{a}\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

и т. д.

Теорема VI. Высоты треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ. (Для доказательства этого проводятъ чрезъ вершины треугольника прямыя, параллельныя противолежащимъ сторонамъ, до взаимнаго ихъ пересѣченія, а далѣе пользуются теоремами 69 и 153).

Теорема VII. Медіаны сторонъ треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ, дѣлящей каждую медіану въ отношеніи 2 : 1 и лежащей притомъ вдвое ближе къ сторонамъ треугольника, чѣмъ къ противолежащимъ имъ вершинамъ. (Точка пересѣченія медіанъ треугольника называется *центромъ тяжести* треугольника).

Теорема VIII. Точки пересѣченія высотъ треугольника отъ любой вершины его вдвое болѣе разстоянія центра круга, описаннаго около этого треугольника, отъ стороны, противолежащей этой вершинѣ. (Доказательство основано на слѣдствіи 2-мъ теоремы 122, на теоремѣ 69 и на теоремѣ 169).

Теорема IX. Точка H пересѣченія высотъ треугольника, центръ тяжести его G и центръ C круга, описаннаго около этого треугольника, лежатъ на одной прямой, притомъ такъ, что $HG : GC = 2$. — Доказательство основано на теоремѣ VIII и на теоремѣ 140. (Эта прямая называется *Эйлеровой прямою* по имени славнаго геометра XVIII в. Леонарда Эйлера).

Теорема X. Окружность, проходящая чрезъ середины сторонъ треугольника, проходитъ также чрезъ основанія высотъ и чрезъ средины отрѣзковъ, соединяющихъ точку пересѣченія высотъ съ вершинами тре-

угольника. (Эта окружность называется окружностью *девяти точекъ*, и центръ ея лежитъ на Эйлеровой прямой треугольника *).

Теорема XI. Если въ треугольникѣ ABC провести четвертую прямую, которая сторону AB пересѣчетъ въ точкѣ c, сторону AC въ точкѣ b, а сторону BC въ точкѣ a, то

$$aB \cdot bC \cdot cA = Ab \cdot Bc \cdot Ca.$$

(Для доказательства этого достаточно изъ точки C провести прямую параллельную къ четвертой прямой).

Теорема XII. Если точку, взятую внутри треугольника ABC, соединить съ вершинами его прямыми и продолжить ихъ до пересѣченія со стороною AB въ точкѣ c, со стороною AC въ точкѣ b и со стороною BC въ точкѣ a, то

$$aB \cdot bC \cdot cA = Ab \cdot Bc \cdot Ca.$$

(Доказательство основано на теоремѣ XI).

6. О правильныхъ многоугольникахъ.

Кромѣ выпуклыхъ правильныхъ многоугольниковъ, существуютъ такъ наз. *правильные звъздчатые многоугольники*. Такъ напр. соединивъ первую вершину правильнаго пятиугольника съ третьею, эту послѣднюю съ пятою и т. д. (все чрезъ одну), считая въ одномъ и томъ же направленіи, получимъ правильный звѣздчатый пятиугольникъ.

Теорема I. Сторона правильнаго выпуклаго вписаннаго пятиугольника равна гипотенузѣ треугольника, котораго катеты порознь равны радіусу его и сторонѣ правильнаго выпуклаго вписаннаго въ тотъ же кругъ десятиугольника.

Теорема II. Сторона правильнаго вписаннаго звѣздчатаго пятиугольника равна гипотенузѣ треугольника, котораго катеты равны радіусу и сторонѣ правильнаго вписаннаго звѣздчатаго десятиугольника.

Замѣчаніе. Относительно числа всѣхъ возможныхъ правильныхъ многоугольниковъ, число сторонъ которыхъ равна n, существуютъ слѣдующія интересныя теоремы, которыхъ доказательство носитъ, впрочемъ, ариѳметическій характеръ: 1) Если окружность раздѣлена на n равныхъ между собою частей, если соединить, считая въ одномъ направленіи, первую точку дѣленія съ нѣкоторою p-тою точкою, эту послѣднюю снова съ p-тою и т. д., и если при этомъ числа $p+1$ и n взаимно-первыя числа, то придемъ въ точку выхода и получимъ звѣздчатый правильный многоугольникъ; 2) если же числа $p+1$ и n суть числа взаимно-кратныя, и если, напр. $p+1 = p_1 k$, а $n = n_1 k$, гдѣ k есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ $p+1$ и n, то, поступая съ точками

*) Весьма интересныя свойства треугольника приводятся въ сочиненіи Feuerbach'a подъ заглавіемъ «Das geradlinige Dreieck». Фейербахъ первый занялся свойствами окружности девяти точекъ.

дѣленія такъ же, какъ въ предъидущемъ случаѣ, получимъ многоугольникъ, число сторонъ котораго равно $n : k$. 3) Если число дѣленій окружности равно n, то существуетъ столько многоугольниковъ объ n сторонахъ (выпуклыхъ и звѣдчатыхъ), сколько существуетъ чиселъ простыхъ съ n и притомъ меньшихъ, чѣмъ $\frac{n}{2}$, въ рядѣ чиселъ: $1, 2, 3, \ldots n-1$ *).

7. Нѣкоторыя задачи на построеніе.

Кромѣ разрѣшенныхъ въ текстѣ задачъ на построеніе, крайне важно самостоятельно разрѣшить слѣдующія 10 задачъ

Задача 1. Къ двумъ окружностямъ провести общую касательную.

Задача 2. Провести окружность, касательную къ данной прямой и проходящую чрезъ двѣ точки, лежащія внѣ ея (притомъ, конечно, по одну сторону этой прямой).

Задача 3. Провести окружность, касательную къ даннымъ двумъ прямымъ и проходящую чрезъ данную точку.

Задача 4. Провести окружность, касательную къ даннымъ тремъ прямымъ, которыя не всѣ другъ другу параллельны.

Задача 5. Провести окружность, касательную къ данной прямой въ данной точкѣ этой послѣдней и къ данной окружности тоже въ нѣкоторой данной точкѣ ея.

Задача 6. Провести окружность, касательную къ данной окружности и проходящую чрезъ данныя двѣ точки.

Задача 7. Провести чрезъ данную точку окружность, касательную къ данной прямой и къ данной окружности.

Задача 8. Провести окружность касательную къ даннымъ двумъ окружностямъ и къ данной прямой.

Замѣчаніе. Рѣшеніе всѣхъ этихъ задачъ съ помощью методы подстановокъ не требуетъ знанія какихъ либо теоремъ, не изложенныхъ въ «Учебникѣ геометріи».

Лемма. Если въ уголъ вписаны двѣ окружности, касательныя къ сторонамъ угла, если разстояніе вершины угла до точки касанія съ меньшею окружностью равно d_1, а разстояніе той же вершины до точки касанія съ большею равно d_2, если далѣе изъ вершины проведена сѣкущая до пересѣченія съ обѣими окружностями, и разстоянія вершины до точекъ пересѣченія послѣдовательно обозначены буквами l_1, l_2, l_3 и l_4, то

$$l_1 \cdot l_4 = l_2 \cdot l_3 = d_1 \cdot d_2 .$$

(Доказательство этой леммы и распространеніе ея на случай, когда окружности проведены въ двухъ вертикальныхъ углахъ, предоставляется учащемуся).

---

*) См. Алгебру Бертрана въ переводѣ и съ дополненіями Н. И Билибина. Спб. 1885.

Задача 9. Провести окружность, проходящую чрезъ данную точку и касательную къ двумъ даннымъ окружностямъ.

Задача 10. Провести окружность касательную къ даннымъ тремъ окружностямъ.

8. О выпуклыхъ многогранникахъ.

Если дана не замкнутая многогранная поверхность, которой грани всѣ суть прямолинейныя фигуры, то каждая сторона фигуры считается ребромъ ея, а каждая вершина фигуры—вершиною поверхности.

Теорема I. Если многогранная поверхность принадлежитъ къ числу выпуклыхъ, то сумма числа граней и числа вершинъ ея равна числу реберъ, увеличенному на единицу. — Доказательство ведется способомъ заключенія отъ n къ $n+1$, а именно слѣдующимъ образомъ: пусть число граней данной многогранной поверхности равно F, число вершинъ S, а число реберъ A, и пусть въ этомъ случаѣ

$$F+S=A+1;$$

докажемъ, что если число граней новой поверхности

$$F_1=F+1,$$

если число вершинъ ея равно S_1, а число реберъ ея A_1, то

$$F_1=S_1+A_1.$$

Для доказательства этого къ одному изъ свободныхъ реберъ данной многогранной поверхности пристроимъ еще одну грань, и пусть въ ней p сторонъ; тогда въ ней также p вершинъ, и

$$F_1=F+1,\ S_1=S+p-2,\ A_1=A+p-1,$$

и

$$F_1+S_1=F+S+p-1,$$

а

$$A_1+1=A+p.$$

Но, по условію, $F+S=A+1$, стало-быть

$$F+S+p-1=A+p,$$

откуда (аксіома 6) $F_1+S_1=A_1+1$. Такимъ образомъ мы доказали, что теорема справедлива для $n+1$ граней, если она справедлива для n граней.—Но если многогранная поверхность состоитъ изъ одного только многоугольника о p сторонахъ, то въ этомъ случаѣ

$$F=1,\ S=p,\ \text{и}\ A=p,$$

а потому

$$F+S=p+1,\ \text{и}\ A+1=p+1,$$

т. е.

$$F+S=A+1.$$

Стало-быть, теорема справедлива и для выпуклой многогранной поверхности о двухъ граняхъ, о трехъ граняхъ и т. д., г. е. во всякой выпуклой многогранной поверхности

$$F+S=A+1.$$

Слѣдствіе. Во всякомъ выпукломъ многогранникѣ

$$F + S = A + 2,$$

гдѣ F обозначаетъ число его граней, S число его вершинъ, A число его реберъ.—Дѣйствительно: удаливъ одну грань, получимъ, что

$$(F - 1) + S = A + 1, \text{ откуда } F + S = A + 2.$$

Эта теорема извѣстна въ наукѣ подъ названіемъ *Эйлеровой теоремы* по имени одного изъ величайшихъ геометровъ XVIII в. *Леонарда Эйлера* (род. въ Базелѣ 1707, а ум. въ СПБ. въ 1783 г.).

Теорема II. Если данъ выпуклый многогранникъ, то число всѣхъ граней съ нечетнымъ числомъ сторонъ есть число четное, и число всѣхъ многогранныхъ угловъ съ нечетнымъ числомъ реберъ есть тоже число четное.—Дѣйствительно: пусть число треугольныхъ граней равно f_3, число четырехугольныхъ f_4, пятиугольныхъ f_5 и т. д., а число всѣхъ граней равно F, тогда

$$F = f_3 + f_4 + f_5 + \ldots \ldots \quad (1)$$

Если A выражаетъ число всѣхъ реберъ, то число $3f_3$ выражаетъ число реберъ во всѣхъ треугольныхъ граняхъ, $4f_4$ — число реберъ во всѣхъ четырехугольныхъ граняхъ, и т. д., и

$$3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots = 2A, \ldots \quad (2)$$

потому что каждое ребро принадлежитъ двумъ гранямъ. Откуда

$$3f_3 + 5f_5 + 7f_7 + \ldots = 2A - 4f_4 - 6f_6 - \ldots$$

т. е. число всѣхъ граней съ нечетнымъ числомъ сторонъ есть число четное.—Пусть далѣе s_3 обозначаетъ число трехгранныхъ угловъ даннаго многогранника, s_4 число четырехгранныхъ угловъ и т. д.; тогда, сохраняя тѣ же обозначенія, подобными же разсужденіями придемъ къ заключенію, что

$$S = s_3 + s_4 + s_5 + \ldots \ldots \quad (3)$$

$$3s_3 + 5s_5 + 7s_7 + \ldots = 2A - 4s_4 - 6s_6 - \ldots \quad (4)$$

т. е. что число многогранныхъ угловъ съ нечетнымъ числомъ реберъ есть число четное.

Слѣдствіе. При прежнихъ обозначеніяхъ,

$$2F = 4 + s_3 + 2s_4 + 3s_5 + 4s_6 + \ldots \quad (5)$$

$$2S = 4 + f_3 + 2f_4 + 3f_5 + \ldots \quad (6)$$

Теорема III. Во всякомъ выпукломъ многогранникѣ сумма числа треугольныхъ граней и числа трехгранныхъ угловъ не меньше 8-ми.—Дѣйствительно: извѣстно, что

$$A + 2 = F + S, \text{ откуда } 4F + 4S = 4A + 8.$$

Вставивъ вмѣсто F его величину изъ формулы (1), вмѣсто S величину

изъ формулы (3), и вмѣсто $4A$ сумму значений величины $2A$ изъ формулъ (2) и (4), получимъ, что

$$f_3 + s_3 = 8 + (f_5 + s_5) + . \quad . \quad . \quad ., \text{ откуда } f_3 + s_3 \geqq 8.$$

Слѣдствіе. Не существуетъ такого выпуклаго многогранника, въ которомъ не было бы треугольныхъ гранеи и трехгранныхъ угловъ.

Теорема IV. Не существуетъ такого выпуклаго многогранника, всѣ грани котораго обладали бы болѣе, чѣмъ пятью ребрами.—Дѣйствительно: изъ формулъ (3) и (4) выводимъ, что $2A > 3S$, или замѣнивъ величины $2A$ и $3S$ ихъ значеніями, взятыми изъ формулъ (2) и (6), получимъ, что

$$3f_3 + 2f_4 + f_5 > 12 + (f_7 + 2f_8 + . \quad . \quad . \quad .)$$

т. е. что не можетъ быть такого многогранника, въ которомъ и f_3, и f_4, и f_5 одновременно равнялись бы нулю.

Теорема V. Не существуетъ такого выпуклаго многогранника, всѣ многогранные углы котораго обладали бы болѣе, чѣмъ пятью ребрами. —Дѣйствительно: изъ формулъ (1) и (2) выведемъ, что $2A > 3F$, или замѣнивъ величины $2A$ и $3F$ ихъ значеніями, взятыми изъ формулъ (4) и (5), получимъ, что

$$3s_3 + 2s_4 + s_5 > 12 + (s_4 + 2s_8 + . \quad . \quad . \quad .),$$

т. е. что не существуетъ такого выпуклаго многогранника, въ которомъ s_3, s_4 и s_5 одновременно равнялись бы нулю.

Теорема VI. Существуетъ только пять родовъ выпуклыхъ многогранниковъ, въ которыхъ всѣ грани обладаютъ однимъ и тѣмъ же числомъ сторонъ и всѣ многогранные углы — однимъ и тѣмъ же числомъ реберъ.

Дѣйствительно: обозначивъ число сторонъ каждой грани подобнаго многогранника буквою x, а число реберъ каждаго многограннаго угла буквою y, и сохранивъ прежнія обозначенія для числа вершинъ, числа граней и числа реберъ, получимъ, что

$$2A = xF = yS.$$

Присоединивъ къ этимъ уравненіямъ уравненіе Эйлера

$$A + 2 = F + S,$$

получимъ, что

$$F = \frac{1y}{2(x+y) - xy}.$$

При $x = 3$, получаемъ, что y можетъ имѣть три значенія: 3 или 4, или 5, и тогда F соотвѣтственно равно 4 или 8, или 20. При $x = 4$, получаемъ, что y можетъ имѣть только одно значеніе: 3, и тогда $F = 6$. При $x = 5$, y тоже можетъ имѣть только одно значеніе: 3, и тогда $F = 12$. При $x = 6$, ни буквѣ y, ни F нельзя придать цѣлаго значенія, т. е.: такого выпуклаго многогранника, въ которомъ всѣ грани были бы шестиугольники и всѣ многогранные углы имѣли бы одно и

то же число реберъ, не существуетъ. Стало-быть, существуютъ только такіе выпуклые многогранники искомаго рода, въ которыхъ F можетъ имѣть значенія: 4, 6, 8, 12 и 20.

Замѣчаніе 1-ое. Къ числу такихъ многогранниковъ принадлежатъ правильные выпуклые многогранники: тетраэдръ, эксаэдръ, октаэдръ, додекаэдръ и икосаэдръ, извѣстные подъ общимъ названіемъ пяти *Платоновыхъ тѣлъ*, въ честь славнаго греческаго философа Платона (429—348 до Р. Хр.). Ср. замѣчаніе, которымъ снабжена теорема 268 *).

Замѣчаніе 2-ое. Достойно вниманія, что около всякаго правильнаго многогранника можно описать и во всякій правильный многогранникъ можно вписать сферическую поверхность.

9. О равенствѣ трегранныхъ угловъ.

Относительно равенства трегранныхъ угловъ легко доказываются слѣдующія теоремы, представляющія нѣкоторую аналогію съ теоремами о равенствѣ треугольниковъ:

Теорема I. Плоскій уголъ и прилежащіе къ нему двугранные углы трехграннаго угла, если они одинаково расположены, опредѣляютъ трехгранный уголъ (Ср. теорему 52).

Теорема II. Два плоскіе угла, если они одинаково расположены, и двугранный уголъ, ими образованный, опредѣляютъ трехгранный уголъ (Ср. теорему 51).

Теорема III. Три плоскіе угла трехграннаго угла, если они одинаково расположены, опредѣляютъ трехгранный уголъ (Ср. теорему 50).

Слѣдствіе. Три двугранныхъ угла трехграннаго угла, если они одинаково расположены, опредѣляютъ трехгранный уголъ.

10. О подобныхъ многогранникахъ и подобныхъ тѣлахъ вращенія.

Два многогранника называются *подобными*, если въ нихъ многогранные углы соотвѣтственно равны и образованы соотвѣтственно подобными и подобнымъ образомъ расположенными гранями. Подобными тѣлами вращенія называются одноименныя тѣла вращенія, представляющія собою предѣлы двухъ подобныхъ многогранниковъ (пирамидъ и призмъ) или двухъ подобныхъ кубарей. Относительно подобныхъ многогранниковъ и тѣлъ вращенія достойны вниманія слѣдующія теоремы, доказательство которыхъ не представляетъ никакихъ затрудненій:

Теорема I. Сходственныя ребра двухъ подобныхъ многогранниковъ пропорціональны.

---

*) Построеніе и вычисленія, относящіяся до взаимнаго наклоненія смежныхъ граней въ правильныхъ многогранникахъ, можно найти въ «Элементарной геометріи», составленной Н. И. Билибинымъ (Спб., 1887) и въ другихъ болѣе или менѣе подробныхъ трактатахъ по предмету геометріи.

Теорема II. Отсѣченная часть пирамиды, усѣченной параллельно основанію, подобна всей пирамидѣ.

Теорема III. Если двѣ грани одной треугольной пирамиды подобны двумъ гранямъ другой, если онѣ подобнымъ образомъ расположены и образуютъ равные между собою двугранные углы, то эти пирамиды подобны.

Теорема IV. Если многогранники составлены изъ одинаковаго числа порознь подобныхъ и подобнымъ образомъ расположенныхъ треугольныхъ пирамидъ, то эти многогранники подобны, и обратно: если два многогранника подобны, то ихъ можно разложить на одинаковое число порознь подобныхъ и подобнымъ образомъ расположенныхъ треугольныхъ пирамидъ.

Теорема V. Поверхности двухъ подобныхъ многогранниковъ относятся между собою какъ квадраты, а объемы — какъ кубы сходственныхъ реберъ.

Теорема VI. Прямые цилиндры, которыхъ высоты соотвѣтственно пропорціональны радіусамъ основанія, называются подобными, и ихъ поверхности относятся между собою какъ квадраты радіусовъ, а объемы— какъ кубы ихъ.

Теорема VII. Прямые конусы, которыхъ высоты (или образующія) пропорціональны радіусамъ основанія, называются подобными, и ихъ поверхности относятся между собою какъ квадраты радіусовъ, а объемы— какъ кубы ихъ.

Теорема VIII. Всѣ шары считаются подобными другъ другу, и поверхности всякихъ двухъ шаровъ относятся между собою какъ квадраты, а объемы—какъ кубы радіусовъ.

11. О построеніи прямыхъ, выражаемыхъ алгебраическими формулами, и о приложеніи алгебры къ геометріи.

Если буква a обозначаетъ длину нѣкоторой прямой, а буква b длину другой прямой, то построить выраженія:

$$a+b,\ a-b,\ a\cdot b,\ a:b,\ \sqrt{ab}\ \text{и т. д.}$$

значитъ построить рядъ прямыхъ линій, которыхъ длина выражается въ тѣхъ же единицахъ мѣры и притомъ порознь измѣряется каждымъ изъ данныхъ выраженій. Построеніе величинъ $a+b$ и $a-b$ сводится къ сложенію и вычитанію двухъ отрѣзковъ. Для построенія выраженія $a\cdot b$, примемъ во вниманіе, что если

$$x=a\cdot b,\ \text{то}\ x:a=b:1,$$

т. е. x есть четвертая пропорціональная прямыхъ: a, b и 1, (задача 32, стр. 116); для построенія же выраженія $a:b$, примемъ во вниманіе, что если

$$x=a:b,\ \text{то}\ x:1=a:b,$$

т. е. x есть четвертая пропорціональная прямыхъ 1, a и b; наконецъ, для построенія выраженія $\sqrt{ab}$, примемъ во вниманіе, что если

$$x=\sqrt{ab},\ \text{то}\ a:x=x:b,$$

т. е. x есть средняя пропорціональная между a и b.—Для построенія (въ видѣ прямой) какого угодно одночлена $abcde$ достаточно произведеніе всѣхъ множителей за исключеніемъ одного обозначить одною буквою, и тогда, если положить, что

$$x = abcde,\ y = abcd,\ z = abc,\ u = ab,$$

дѣло сведется сначала къ построенію прямой u, которая равна произведенію ab, потомъ къ построенію прямой z, которая равна произведенію uc, затѣмъ къ построенію прямой y, которая равна произведенію zd, и наконецъ—къ построенію прямой x, которая равна произведенію ye.

Опредѣленіе. Если данное алгебраическое выраженіе обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что отъ умноженія каждой буквы, входящей въ его составъ, на нѣкоторое число k, все выраженіе умножается на нѣкоторую степень того же числа k, то это выраженіе называется *однороднымъ* по отношенію къ входящимъ въ него буквамъ. Такъ, напр., выраженія

$$a + b,\ a^2 + 2ab + b^2,\ 7a^3 + 3a^2b - 4ab^2$$

суть выраженія однородныя относительно буквъ a и b.

Въ спеціальныхъ сочиненіяхъ по предмету приложенія алгебры къ геометріи доказываются слѣдующія три теоремы

I. Если геометрическая задача приводитъ къ алгебраическому уравненію

$$F(a, b, c, \ldots, m, n) = o$$

гдѣ $F(a, b, c, \ldots, m, n)$ обозначаетъ цѣлый и раціональный многочленъ относительно величинъ $a, b, c, \ldots, m$ и n, то первая часть этого уравненія представляетъ либо однородный относительно этихъ величинъ многочленъ, либо же сумму нѣсколькихъ многочленовъ, изъ которыхъ каждый есть многочленъ однородный.

II. Если геометрическая задача привела къ уравненію

$$F(a, b, c, \ldots, m\ n) = o$$

въ которомъ первая часть не представляетъ однороднаго многочлена, то, выбравъ другую единицу мѣры для прямыхъ $a, b, c, \ldots, m$ и n, можно этотъ многочленъ обратить въ однородный.

III Всякая геометрическая задача, разрѣшенная съ помощью уравненія, составленнаго на основаніи условій задачи, приводитъ къ уравненію

$$F(a, b, c, \ldots, m, n) = o,$$

гдѣ лѣвая часть $F(a, b, c, \ldots, m, n)$ есть однородный многочленъ или же можетъ быть обращена въ таковой.

Для того чтобы разрѣшить геометрическую задачу съ помощью Алгебры, если задача только допускаетъ алгебраическое рѣшеніе, поступаютъ слѣдующимъ образомъ. а) предполагаютъ, что задача разрѣшена, и выполняютъ примѣрный чертежъ, разрѣшающій задачу; б) данныя величины принимаютъ за извѣстныя и обозначаютъ ихъ для краткости первыми буквами латинскаго алфавита, в) одну или болѣе неизвѣстныхъ величинъ, отысканіе которыхъ разрѣшитъ задачу, обозначаютъ послѣдними буквами латинскаго алфавита; г) предполагаютъ, что всѣ введенныя буквы обозначаютъ длину данныхъ и неизвѣстныхъ прямыхъ, выраженную въ

однихъ и тѣхъ же единицахъ мѣры, д) составляютъ, на основаніи условій задачи, вспомогательныхъ построеній и свойствъ полученныхъ фигурь, уравненіе (это часто самая трудная ступень рѣшенія), е) рѣшаютъ полученное уравненіе или полученную систему ихъ и изслѣдуютъ рѣшеніе, наконецъ, ж) строятъ рѣшенія.—Для того чтобы дать понятіе о самыхъ пріемахъ подобнаго способа рѣшенія, займемся слѣдующей задачей.

Построить прямоугольный треугольникъ, зная его площадь q и периметръ $2p$.—Для рѣшенія этой задачи обозначимъ длину катетовъ буквами x и y, а длину гипотенузы буквою z, тогда

$$x^2 + y^2 = z,\ x + y + z = 2p,\ \text{и}\ q = \frac{x \cdot y}{2}.$$

Отсюда найдемъ, что

$$x + y = \frac{p^2+q}{p},\ \text{а}\ x \cdot y = 2q.$$

Это значитъ, что x и y представляютъ собою корни квадратнаго, относительно неизвѣстнаго t, уравненія

$$t^2 - \frac{p^2+q}{p} \cdot t + 2q = 0,$$

т. е.

$$x = \frac{p^2+q}{2p} + \sqrt{\left(\frac{p^2+q}{2p}\right)^2 - 2q},$$

$$y = \frac{p^2+q}{2p} - \sqrt{\left(\frac{p^2+q}{2p}\right)^2 - 2q}.$$

Эти рѣшенія даютъ возможность не только построить катеты, но также изслѣдовать при какихъ условіяхъ задача возможна, при какихъ условіяхъ прямоугольный тр-къ имѣетъ наибольшую площадь, если периметръ его данъ, и при какомъ условіи прямоугольный треугольникъ имѣетъ наибольшій периметръ, если дана его площадь.

Замѣчаніе 1-ое. Для того чтобы построить $\sqrt{ab \pm cd}$ надо построить сначала z и y, удовлетворяющіе уравненіямъ $z^2 = ab$ и $y^2 = cd$, а потомъ, на основаніи Пиѳагоровой теоремы построить прямую x, удовлетворяющую уравненію

$$x^2 = y^2 \pm z^2$$

Замѣчаніе 2-ое. Когда въ данное уравненіе входитъ произведеніе двухъ сомножителей, изъ которыхъ одинъ представляетъ собою числовой коэффиціентъ, то необходимо выяснить себѣ—обозначаетъ ли онъ прямую линію данной длины или же отвлеченное число, ибо отъ этого зависитъ самое рѣшеніе.

Замѣчаніе 3-е. Для возстановленія однородности въ выше данномъ рѣшеніи, букву q можно замѣнить произведеніемъ $q \cdot \overline{1}$, гдѣ $\overline{1}$ обозначаетъ прямую, которой длина равна 1.

КОНЕЦЪ.

ОБЪЯВЛЕНІЯ.

Во всѣхъ книжныхъ магазинахъ продаются КНИГИ, СОСТАВЛЕННЫЯ К. Д. КРАЕВИЧЕМЪ:

1) **Учебникъ Физики.** Курсъ ср. уч. зав., съ политип. въ текстѣ и налитографиров. табл. 10-ое изд. Ц. 2 р. 50 к., съ пер. 3 р. 2) **Основанія Физики.** Курсъ женск. уч. зав., съ политип. въ текстѣ 8-е изд. Ц. 1 р. 60 к., съ пер. 2 р. 3) **Физика ежедневныхъ явленій.** Учебное Руководство для гор. и двукл. училищъ. Изд. 2-е. Съ политип. Ц. 70 к., съ пер 90 к. 4) **Очеркъ спектральнаго анализа,** общепонятно изложенный (публичныя лекціи), съ политип. и хромолитографированной таб. спектровъ. Ц. 1 р. 40 к., съ пер. 1 р. 70 к. 5) **Начала Космографіи.** Для ср. уч. зав., съ политип. и налитографир. табл. 3-е изд. Ц. 1 р., съ пер. 1 р. 15 к. 6) **Собраніе алгебрическихъ задачъ** 4-е изданіе, содержащее болѣе 4000 задачъ. Ц. 1 р. 20 к., съ пер. 1 р. 50 к.

ВЪ КНИЖНЫХЪ МАГАЗИНАХЪ ПРОДАЮТСЯ

1) Основныя начала Химіи Арендта. Пер. А. В. Дамскаго.

2) Равенства химическихъ превращеній.

(Повторительный курсъ по неорганической химіи) А. В. Дамскаго.

Въ книжномъ магазинѣ **Н. Г. МАРТЫНОВА.**

(Спб., Невскій пр. № 46) и во всѣхъ книжныхъ магазинахъ Имперіи продаются слѣдующія сочиненія

ВИКТОРА СТРЕКАЛОВА:

1) ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ АРИѲМЕТИКА. Спб. 1890.

(Стр. VIII+200 in 8°. Цѣна 1 р. 25 коп.)

Содержаніе. Введеніе. Книга первая. ариѳметическія дѣйствія и ихъ основныя свойства. Книга вторая. ариѳметическія дѣйствія съ числами десятичной и другихъ системъ. Книга третья. необходимыя свѣдѣнія изъ теоріи чисель и ихъ приложенія.

2) КУРСЪ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ

(Цѣна 3 р.—Для студентовъ и слушательницъ высшихъ женскихъ курсовъ книжный магазинъ Мартынова дѣлаетъ уступку въ 50% съ номинальной цѣны).

Содержаніе. Введеніе. (§ 1. Выраженіе геометрическихъ мѣстъ уравненіями. Предметъ аналит. геометріи. § 2 Предварительныя задачи. § 3. Необходимыя свѣдѣнія изъ теоріи детерминантовъ). Глава I Кривая перваго порядка или прямая линія. (§ 1. Теорія. § 2. Приложеніе. § 3. Методъ сокращеннаго обозначенія). Глава II. Кривая перваго класса или точка.—Пунктуалы и пучки. (§ 1. Уравненіе точки. Координаты касательныхъ. Принципъ двойственности. Приложеніе. § 2. Ангармонія, проэкція и инволюція. § 3. Преобразованіе обобщеніе координатъ.)

3) КАРМАННАЯ КНИЖКА

для преподавателей математики и физики на 1890—91 годъ. Цѣна 1 р.

Дозволено цензурою. С.-Петербургъ. 16 Декабря 1890 г.